Задание 14. ЕГЭ. Нер-ва

1) Нер-ва 9 класса
2) Нер-ва с модулем
3) Нер-ва с корнем (Иррациональные нер-ва)
4) Показательные неравенства
5) Логар. нер-ва с числом в основании
6) Логар. нер-ва с пер-ой в основании
7) Смешанные неравенства

Данный файл предназначен для получения полной базы, необходимой для начала работы с заданием 14 ЕГЭ.

1. Неравенства 9 кл

! Сутью любого нер-ва является (нер-во сущ-ет для) поиск таких чисел, которые при подстановке на место икса сделают левую часть больше (меньше), чем правую.

Пример: При каких x (при каких числах на месте x) $2x-5$ будет больше 1?

$2x-5>1$ – используем логическую конструкцию неравенство для ответа на вопрос.

Существует 2 вида нер-в

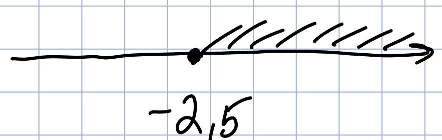
I Линейные

$3x-4 \le 5x+1$

$-2x \le 5 \quad |:(-2)$

при делении нер-ва на отриц. число меняется знак!

$x \ge -2{,}5$



! больше, чем $-2{,}5$ => штриховка правее $-2{,}5$; меньше, чем $-2{,}5$ – левее

$\ge$ или $\le$ • [ ]

$>$ или $<$ ○ ( )

Ответ: $x \in [-2{,}5; +\infty)$

(бескон-сть всегда с кругл. ск)

II Все остальные (решаются методом интервалов)

Метод интервалов:

1) перекинуть всё влево (или вправо)
2) заменить знак нер-ва на знак ур-ия
3) найти корни этого ур-ия. Найденные корни будут являться точками перехода на числовой прямой

! В дробных нер-ах зн-ль тоже дает т. перех.

4) нарисовать числовую прямую, отметить на ней точки перехода. Далее нужно определить, положит-ый или отриц-ый будет многочлен ($2x^2-3x$) на каждом интервале, подставляя числа из каждого интервала в многочлен. Интервалы, в которых многочлен принимает положит. значение, получают знак +; отриц-ые - −

5) штрихуем интервалы с +, если знак $> \geq$

−, если знак $< \leq$

Примеры нер-в из II группы.

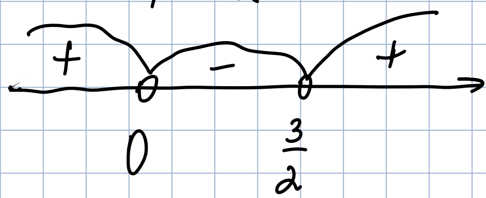
1. $2x^2 > 3x$

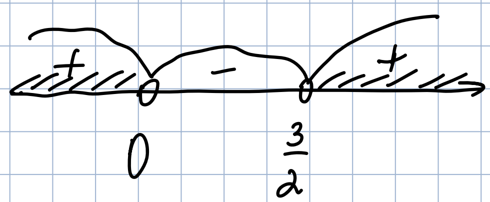
$2x^2 - 3x > 0$

$2x^2 - 3x = 0$

$x(2x-3) = 0$

$x = 0; \quad x = \frac{3}{2}$





! 1) взяли число 5 из прав-го инт.

$2 \cdot 25 - 3 \cdot 5 = 60 > 0 \Rightarrow +$

! многочлен $2x^2 - 3x$ на инт-ле $> \frac{3}{2}$ положит-ен!

2) взяли $\frac{1}{2}$ из среднего интерв

$2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1 < 0 \Rightarrow -$

3) взяли -2 из левого инт.

$2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 14 > 0 \Rightarrow +$

! штрихуем +, т.к. нам нужно узнать, на каких интервалах многочлен $2x^2 - 3x$ больше 0 (положителен), т.к. + в интервале и означает, что многочлен в этом интервале больше 0.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

2. $(4x-6)^2 \leq (6x-4)^2$

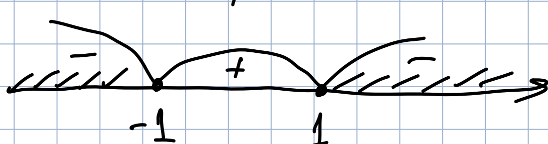
$(4x-6)^2 - (6x-4)^2 \leq 0$

$(4x-6)^2 - (6x-4)^2 = 0$

$\big((4x-6) - (6x-4)\big)\big((4x-6) + (6x-4)\big) = 0$

$(-2x-2)(10x-10) = 0$

$x = -1; \ x = 1$



Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

3. $\frac{11x-4}{5} \geq \frac{x^2}{2} \quad \Big| \cdot 10$

! Умножение и деление на число в ур. и нер-ах – очень безобидное действие.

$2(11x-4) \geq 5x^2$

$22x - 8 \geq 5x^2$

$5x^2 - 22x + 8 \leq 0$

4. $(\sqrt{3} - 1{,}5)(3 - 2x) > 0$

! $\sqrt{3} - 1{,}5$ – число!!!

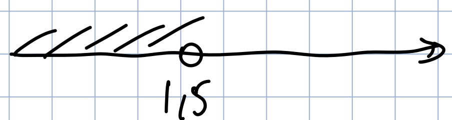
$\sqrt{3} - 1{,}5 = \sqrt{3} - \sqrt{2{,}25}$ => это положит. число

$(\sqrt{3} - 1{,}5)(3 - 2x) > 0 \quad \Big| : \sqrt{3} - 1{,}5$

$3 - 2x > 0$

$-2x > -3 \quad \Big| : (-2)$

$x < 1{,}5$



Ответ: $x \in (-\infty; 1{,}5)$

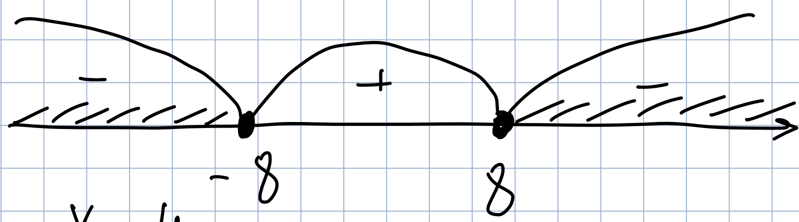
5. $x^2(-x^2-64) \le 64(-x^2-64)$

$x^2(-x^2-64)-64(-x^2-64) \le 0$

$(-x^2-64)(x^2-64)=0$

(подставляем сюда)

$\left[\begin{array}{l} -x^2-64=0 \\ x^2-64=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \text{нет т. перех.} \\ x=\pm 8 \end{array}\right.$



6. $\dfrac{x-4}{x-5} \le 0$

(любое нер-во, где есть огр-ия, нужно начинать с ОДЗ.)

Нер-во опр. при

1) $x-5 \ne 0$

$x \ne 5$

$\dfrac{x-4}{x-5} \le 0$

I способ:

$\begin{cases} (x-4)(x-5) \le 0 \\ x-5 \ne 0 \end{cases}$ — это самый умный переход, т.к. знаки многочленов $(x-4)(x-5)$ и $\frac{x-4}{x-5}$ один-ые.

Т.к. вторая строчка системы уже написана в ОДЗ, то оставляем только 1-ую строчку

(5 выколотая!!! т.к. в зн-ле)

$(x-4)(x-5) \le 0$

II способ: (я считаю лучше)

$\frac{x-4}{x-5} \le 0$

Нер-во опр. при

1) $x-5 \ne 0$

$x \ne 5$

$\frac{x-4}{x-5} \le 0$

Найдём точки перехода числителя и знам-ля

$x-4=0$ $\qquad$ $x-5=0$

$x=4$ $\qquad$ $x=5$

Ответ: $x \in [4;5)$

7. $\frac{-10}{(x-3)^2-5} \ge 0$

Нер-во опр. при:

1) $(x-3)^2-5 \ne 0$

$(x-3)^2 \ne 5$

$\left[\begin{array}{l} x-3 \ne \sqrt{5} \\ x-3 \ne -\sqrt{5} \end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} x \ne 3+\sqrt{5} \\ x \ne 3-\sqrt{5} \end{array}\right.$

$$\frac{-10}{(x-3)^2-5} \geq 0$$

Найдём точки перехода числ. и зн-ля

$-10=0$

нет т. перех.

$(x-3)^2-5=0$

$x=3+\sqrt{5}$; $x=3-\sqrt{5}$

(при определении знаков я подст-лял в знам. дробь)

8. $$\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}+\frac{7x-19}{x-3} \leq \frac{8x+1}{x}$$

ОДЗ:

1) $x^2-2x \neq 0$

$x(x-2) \neq 0$

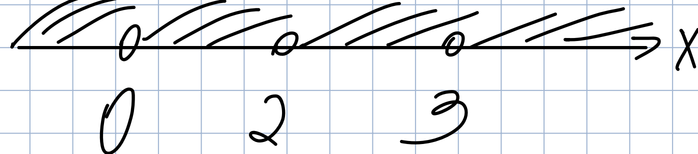
$x \neq 0$; $x \neq 2$

2) $x-3 \neq 0$

$x \neq 3$

3) $x \neq 0$

Нер-во опр при $x \in$



$$\frac{(x^2-2x-2)(x-3)+x(7x-19)(x-2)-(8x+1)(x-2)(x-3)}{x(x-2)(x-3)} \le 0$$

$$\frac{x^2-x}{x(x-2)(x-3)} \le 0$$

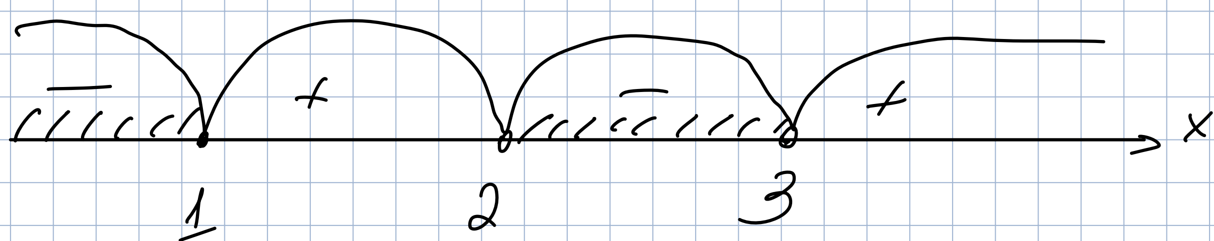
$$\frac{x(x-1)}{x(x-2)(x-3)} \le 0$$

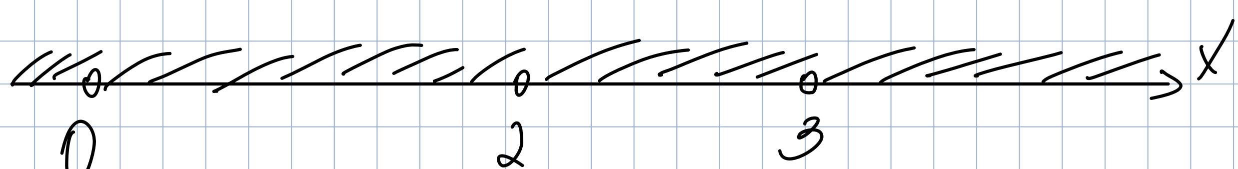
$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \le 0$$

Найд. т. пер. чис. и зн-ля

$x-1=0$ $\qquad\qquad$ $(x-2)(x-3)=0$

$x=1$ $\qquad\qquad$ $x=2 \quad x=3$





Ответ: $x \in (-\infty;0) \cup (0;1] \cup (2;3)$

9. $$\frac{x^2+6x+8}{x+1}-\frac{x+4}{x^2+3x+2}\geq 0$$

ОДЗ:

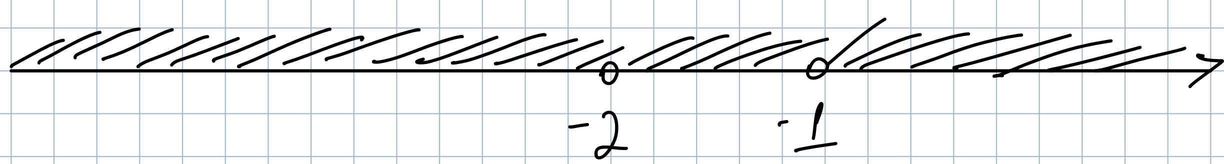
1) $x+1\neq 0$

$x\neq -1$

2) $x^2+3x+2\neq 0$

$x\neq -1$

$x\neq -2$



$$\frac{(x+2)(x+4)}{x+1}-\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}\geq 0$$

$$\frac{(x+2)^2(x+4)-(x+4)}{(x+1)(x+2)}\geq 0$$

Найд т перех чсл и зн-ля

$(x+2)^2(x+4) - (x+4) = 0$

$(x+4)\left((x+2)^2 - 1\right) = 0$

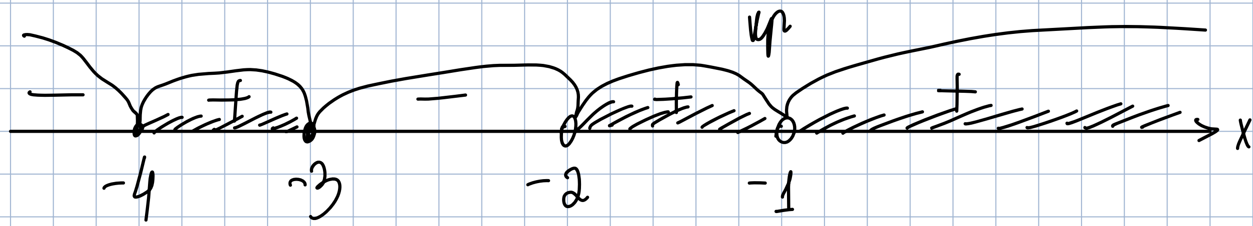
$x+4 = 0 \qquad (x+2)^2 - 1 = 0$

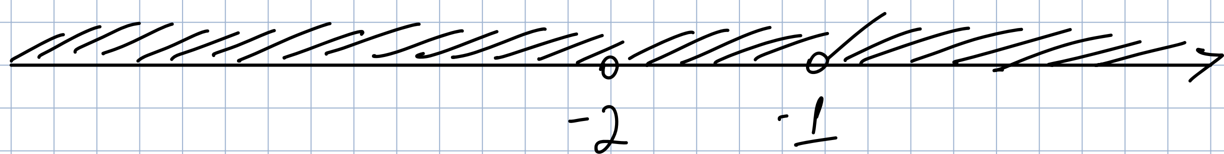
$x = -4 \qquad x = -3$

$x = -1$

$(x+1)(x+2) = 0$

$x = -1 \quad x = -2$

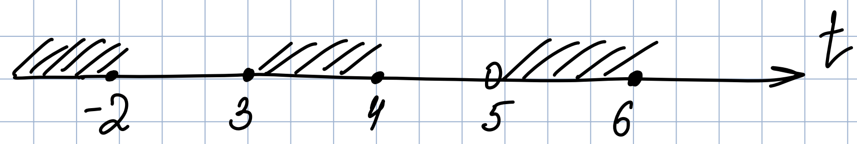




Ответ: $x \in [-4; -3] \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$

Нер-ва, решаемые заменой

! Чтобы решить нер-во, где требуется замена, нужно, получив в процессе решения п.1, написать п.2, чтобы сделать обратную замену.
Все 3 пункта написанных ниже, это одно и то же.

1) 

2) $$\left[\begin{array}{l} t \le -2 \\ \begin{cases} t \ge 3 \\ t \le 4 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 5 \\ t \le 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

3) $t \in (-\infty; -2] \cup [3; 4] \cup (5; 6]$

Форма записи, как в п 3, нужна только в одном случае - когда в самом конце пишешь ответ

10. $$\frac{x^2-3x-2}{x^2-3x+2}+\frac{x^2-3x+16}{x^2-3x}\geq 0$$

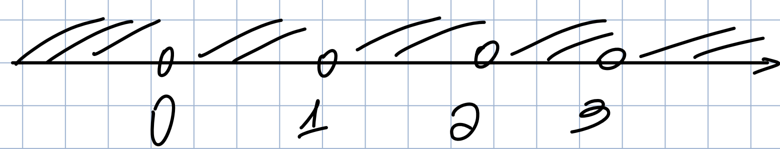
ОДЗ

1) $x^2-3x+2\neq 0$

$x_1\neq 1$; $x\neq 2$

2) $x^2-3x\neq 0$

$x\neq 0$; $x\neq 3$

Нер опр при 

Пусть $x^2-3x=t$

$$\frac{t-2}{t+2}+\frac{t+16}{t}\geq 0$$

$$\frac{t^2-2t+t^2+18t+32}{t(t+2)}\geq 0$$

$$\frac{2t^2+16t+32}{t(t+2)}\geq 0$$

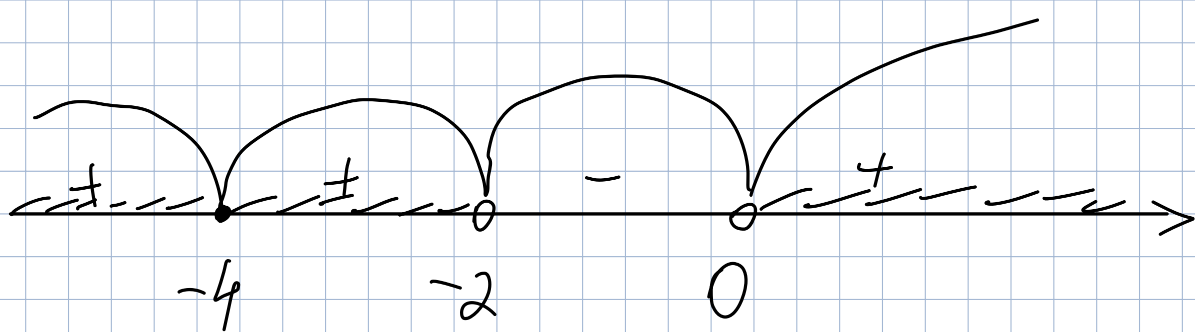
$$\frac{t^2+8t+16}{t(t+2)} \geq 0$$

$$\frac{(t+4)^2}{t(t+2)} \geq 0$$

Найдём т. перех. числ. и зн-ля

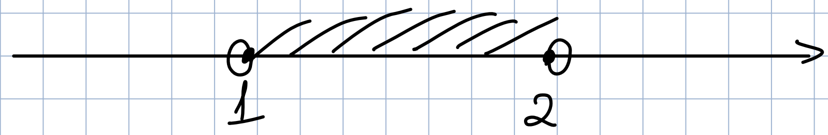
$(t+4)^2=0$ $\qquad$ $t(t+2)=0$

$t=-4$ (кр) $\qquad$ $t=0 \quad t=-2$

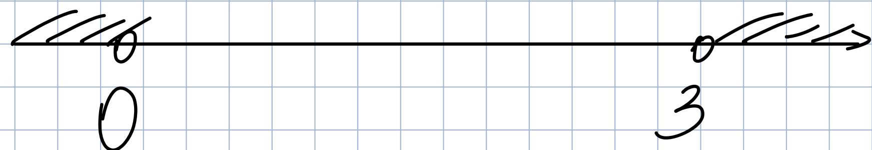


$$\left[\begin{array}{l} t<-2 \\ t>0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll} x^2-3x+2<0 & (1) \\ x^2-3x>0 & (2) \end{array}\right.$$

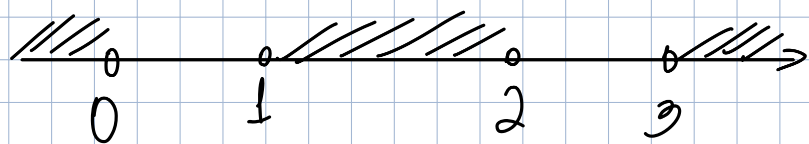
①

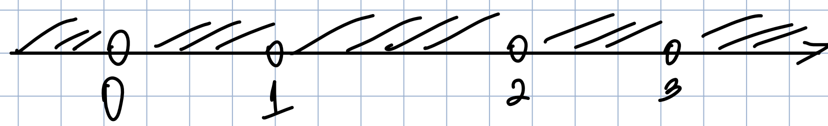


②



Общее решение





Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Система нер-в

Решить систему нер-в (тут разберутся только системы с одной буквой) очень легко – нужно решить каждое нер-во по отдельности, потом нужно нарисовать каждую прямую друг под другом и найти общее решение.

7. $$\begin{cases} \dfrac{-10}{(x-3)^2-5} \geq 0 & (1) \\ 2x^2-3x>0 & (2) \end{cases}$$

(1) Нер-во опр. при:

1) $(x-3)^2-5 \neq 0$

$(x-3)^2 \neq 5$

$$\left[\begin{array}{l} x-3 \neq \sqrt{5} \\ x-3 \neq -\sqrt{5} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \neq 3+\sqrt{5} \\ x \neq 3-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

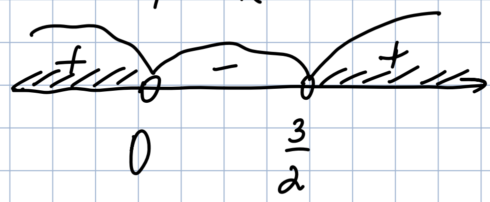
$-10=0$ | $(x-3)^2-5 \neq 0$
нет реш. | $x \neq 3+\sqrt{5}$; $x \neq 3-\sqrt{5}$

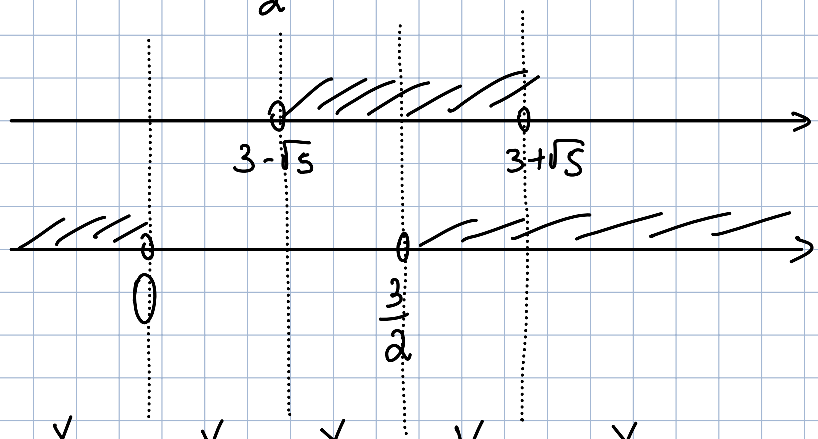
(2) $2x^2 - 3x > 0$

$2x^2 - 3x = 0$

$x(2x-3) = 0$

$x = 0; \quad x = \frac{3}{2}$





X X X V X

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{2}; 3+\sqrt{5}\right)$

2. Нер-ва с модулем

1) Модуль может быть изначально дан или он может появиться в ходе преобразований ($\sqrt{x^2}=|x|$, $\log_3(x-4)^2 = 2\log_3|x-4|$).

2) Как раскрывать модуль, если подмодульное выражение всегда положительно или всегда отрицательно?

То, что мы и так знаем:

1) $|7| = +(7) = 7$
2) $|-5| = -(-5) = 5$

На этих примерах легко увидеть и понять закон-сть: если подмодульное выражение всегда положительно, то модуль меняется на скобки и выкидывает перед собой $+$.

А если подмодульное выражение отрицательно, то модуль меняется на скобки и выкидывает перед собой $-$, например, $|-1| = -(-1) = 1$;

$|x^2+1| = +(x^2+1)$

$|4x^2+20| = +(4x^2+20)$

$|-7x^4-10| = -(-7x^4-10)$

$|x-3| = +(x-3)$, если задано условие $x>7$,

$|x-3| = -(x-3)$, если задано условие $x<2$

! Что $+(x-3)$, что $-(x-3)$ будут >0 при зад-ых иксах

! Значения нераскрытого модуля ≥ 0. А если модуль раскрыт, то значение многочлена, на которое раскрылся модуль, тоже будет ≥ 0

3) Как раскрыть модуль, если подмодульное выражение иногда положительно, а иногда отриц-о? Т.е, например, в ур-ии (нер-ве) есть $|x-4|$ и нет наложенных условий?

Очень просто. Нужно разбить рассмотрение примера на такие интервалы, при которых подмодульное выражение будет всегда полож. или всегда отриц-ым

Применим данную технику решение ур-ий и нер-в в задании, где нет модуля

$$x^2-5x+3<-1.$$

Разобьем рассм. этого нер-ва на 3 случая (интервала): до -3; от -3 до 5; от 5. Эти интервалы взяты наугад, для примера.

Интервалов могло быть больше (4,5...) и меньше.
И сами интервалы могли быть другими. Но сейчас мы увидим, что нет смысла делать это в этом нер-ве, т.к. в каждом интервале (случае) нер-во не изменится.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3 \\ x^2 - 5x + 3 < -1. \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x \le 5 \\ x^2 - 5x + 3 < -1. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5 \\ x^2 - 5x + 3 < -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

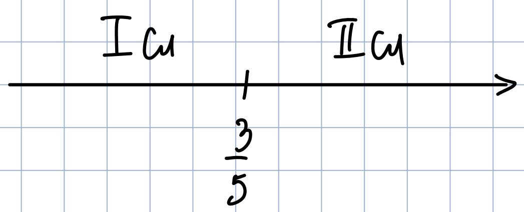
Но в других нер-ах, например в нер-ах с модулем, имеет смысл разбивать, т.к. нер-во с модулем в каждом случае уже будет без модуля, т.к. в каждом случае подмод. выр-ие будет всегда + или −.

Как понять, на какие интервалы нужно разбить пример? Нужно каждое подм-ое выраж. прир-ть к 0 и полученные корни (т. перех) разобьют числовую прямую на нужные нам случаи, при которых подм-ые выраж. будут всегда + или −

$25x^2 + 3|3-5x| < 30x - 9$

$3 - 5x = 0$ (прир-ем каждое подм-ое выр-ие к нулю)

$x = \frac{3}{5}$

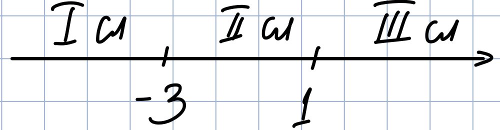


$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \frac{3}{5} \\ 25x^2 + 3(3-5x) < 30x - 9 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ 25x^2 - 3(3-5x) < 30x - 9 \end{cases} \end{array}\right.$$

② $|x^2 + 2x - 3| + 3(x+1) < 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0;$

$x = -3 \quad x = 1$

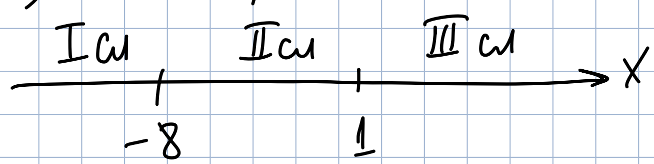


$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -3 \\ +\left(x^2+2x-3\right)+3(x+1)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ -\left(x^2+2x-3\right)+3(x+1)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ +\left(x^2+2x-3\right)+3(x+1)<0 \end{cases}\end{array}\right.$$

③ $3x-|x+8|-|1-x| \le -6$

1) $x+8=0;\ x=-8$

2) $1-x=0;\ x=1$



! точки -8 и 1 на числовой прямой ни закрашенные, ни выколотые.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < -8 \\ 3x+(x+8)-(1-x) \le -6 \end{cases} \\ \begin{cases} -8 \le x \le 1 \\ 3x-(x+8)-(1-x) \le -6 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ 3x-(x+8)+(1-x) \le -6 \end{cases}\end{array}\right.$$

! Чтобы понять, какие будут знаки у $|x+8|$ и $|1-x|$, нужно взять число из интервала и подст-ть. Например, на самом левом интервале ($x<-8$) $|x+8| = -(x+8)$, а $|1-x| = 1-x$ (подставлял -10).

Чтобы быстро решать нер-ва с модулем нужно также знать следующие переходы:

1) $|f(x)| < g(x)$ $\qquad$ $|f(x)| \le g(x)$

$$\begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \ge -g(x) \\ f(x) \le g(x) \end{cases}$$

Это св-во можно легко запомнить, вспоминая каждый раз пример $|x-1|<5$. Какие значения могут быть вместо $x-1$, чтобы их модуль был <5? От -5 до 5, т.е. одновременно больше -5 и меньше 5.

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1>-5 \\ x-1<5 \end{cases}$$

2) $|f(x)| > g(x)$ $\qquad$ $|f(x)| \ge g(x)$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right.$$

Это св-во можно легко запомнить, вспоминая каждый раз пример $|x-1|>5$. Какие значения могут быть вместо $x-1$, чтобы их модуль был >5? Или больше 5, или меньше -5.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1>5 \\ x-1<-5 \end{array}\right.$$

! При решении нер-в с модулем никто не отменял правил решения нер-в, например, методом интервалов.

! $$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

3. Нер-ва с корнем (Иррациональные нер-ва)

Обе части положительны всегда?

да — нет

Пишешь все ограничения и решаешь нер-во возведением в степень (иногда несколько раз)

Знак нер-ва ($> < \geq \leq$) тут не играет роли, т.е. решение нер-ва не зависит от знака.

Рассмотрение 3 случаев, каким будет неопределившееся по знаку выражение. В рассматриваемых случаях нельзя забывать про постоянное наличие ОДЗ.

Знак нер-ва ($> < \geq \leq$) тут играет роль, т.е. решение нер-ва зависит от знака.

! Некоторые иррац. нер-ва решаются по своему способу!

напр, 1 и 2 зад.

1) $\sqrt{x^2-x-2} \leq -2$

нет решений, т.к. корень четной степени не м.б. ≤ -2

2) $\sqrt{x^2-x-90} \geq -1$

$x^2-x-90 \geq 0$, т.к. корень четн. степени всегда > отриц.

числа, т.е. -1. Всегда, но когда определен.

3) $\sqrt{2x-4} < \sqrt{3-x}$ (обе части нер-ва положительны так же, как и в 4, 5, 6 примерах ниже)

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0^{*} \\ 2x-4 < 3-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 < 3-x \end{cases}$$

, *т.к. $3-x \geq 0$ избыточное условие.

! Можно спокойно решить систему из 3-ёх нер-в вместо двух. Ответ будет тоже правильный.

4) $\sqrt{2x-4} \leq x^2+8$

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 \leq (x^2+8)^2 \end{cases}$$

5) $\sqrt{2x-4} \geq \sqrt{3-x}$

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 2x-4 \geq 3-x \end{cases}$$

6) $\sqrt{2x-4} \leq 5$

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 \leq 25 \end{cases}$$

7) $\sqrt{2x-4} > x-10$ (обе части не всегда положит-ы.)

Рассмотрим 3 случая

I случай $x-10=0$

Рассматриваемый случай не интервал, а число => можно сразу все узнать, является ли этот случай подходящим (это число решением)

$x=10$; $\sqrt{16} > 0$ Нер-во сошлось => да, является решением (+)

II случай $x-10>0$

Рассматриваемый случай делает это нер-во нер-ом левой группы иррац-ых нер-в, в которых обе части всегда положит-ы.

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 > x^2-20x+100 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-22x+104<0 \end{cases}$$

, а вместе с условием рассм-го случая второй случай представляет собой систему:

$$\begin{cases} x-10>0 \\ 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 > x^2-20x+100 \end{cases}$$

III случай $x-10<0$

Если $x-10<0$, то решением будет ОДЗ, как в №2.

$2x-4\geq 0$

Одним словом

$$\left[\begin{array}{l} x=10 \quad + \\ \begin{cases} x-10>0 \\ 2x-4\geq 0 \\ 2x-4>x^2-20x+100 \end{cases} \\ \begin{cases} x-10<0 \\ 2x-4\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

8) $\sqrt{2x-4}\geq x-10$

$$\left[\begin{array}{l} x=10 \quad + \\ \begin{cases} x-10>0 \\ 2x-4\geq 0 \\ 2x-4\geq x^2-20x+100 \end{cases} \\ \begin{cases} x-10<0 \\ 2x-4\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

+

9) $\sqrt{2x-4}<x-10$

$$\left[\begin{array}{l} x=10 \quad - \\ \begin{cases} x-10>0 \\ 2x-4\geq 0 \\ 2x-4<x^2-20x+100 \end{cases} \\ \begin{cases} x-10<0 \\ \end{cases} \end{array}\right.$$

$\varnothing$, т.е нет реш, т.к. корень ч.с. не м.б <0. (как №1)

10) $\sqrt{2x-4}\leq x-10$

$$\left[\begin{array}{l} x=10 \quad - \\ \begin{cases} x-10>0 \\ 2x-4\geq 0 \\ 2x-4\leq x^2-20x+100 \end{cases} \\ \begin{cases} x-10<0 \\ \end{cases} \end{array}\right.$$

$\varnothing$

11) $$\frac{\sqrt{2-x}}{x+1} > 1$$

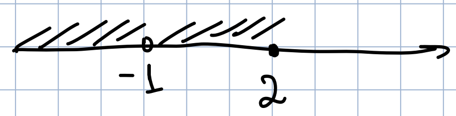
Нер. опр. при

1) $x+1 \neq 0$

$x \neq -1$

2) $2-x \geq 0$

$x \leq 2$



Нер-во определено при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2]$

$$\frac{\sqrt{2-x} - x - 1}{x+1} > 0$$

Найдем т. пер. числ и зн

$\sqrt{2-x} - x - 1 = 0$ $\qquad$ $x+1=0$

$\sqrt{2-x} = x+1$ $\qquad$ $x=-1$

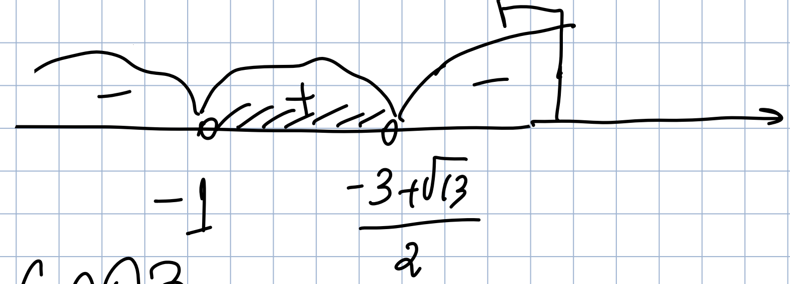
$x^2 + 3x - 1 = 0$

$D = 9 + 4 = 13$

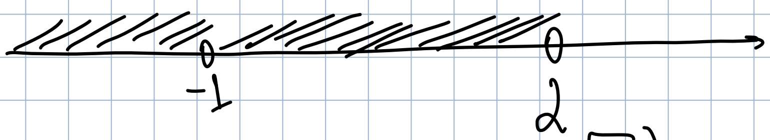
$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Проверим корни на дост-сть, т.к. возведение ур-ия в четн. степень может создать постор. корни. x_2 оказался посторонним после подстановки.



С ОДЗ



Ответ: $x \in \left(-1; \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$

(хотя ОДЗ показали чуть выше стрелочкой, и можно было не рисовать отдельно ОДЗ и искать пересечения)

12) $(x-1)\cdot\sqrt{6+x-x^2} \le 0$

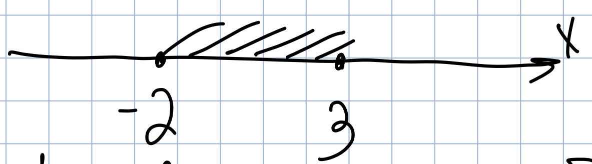
ОДЗ:

$-x^2+x+6 \ge 0$

$x^2-x-6 \le 0$

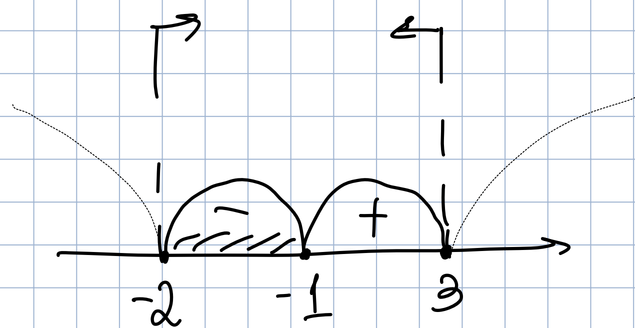
$x_1 = 3$

$x_2 = -2$



Нер-во опр при $x \in [-2; 3]$

$(x+1)\cdot\sqrt{6+x-x^2} = 0$



$x+1=0$ или $\sqrt{6+x-x^2}=0$

$x=-1$ $\quad$ $x=-2; x=3$

Ответ: $x \in [-2; -1]$

13) $\frac{1}{6x^2-5x} \geq \frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$

Нер. опр. при

1) $6x^2-5x \neq 0$

2) $\sqrt{6x^2-5x+1}-1 \neq 0$

3) $6x^2-5x+1 \geq 0$

Замена: пусть $\sqrt{6x^2-5x+1} = t \quad |^2$

$6x^2-5x+1 = t^2$

$6x^2-5x = t^2-1$

$$\frac{1}{t^2-1} \geq \frac{1}{t-1}$$

14) $\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}$

Нер-во опр при

1) $7-x \geq 0$

2) $\sqrt{x-1} \neq 0$

3) $x-1 \geq 0 \longrightarrow x-1>0$

4) $x^3-6x^2+14x-7 \geq 0$, но пример рассчитан на то, чтобы обосновать, почему не нужно писать это ОДЗ, т.к. невозможно решить это нер-во.

Работаем с этим примером с учетом того, что мы написали только 3 пункта ОДЗ. Зная, что мы написали только 3 пункта ОДЗ, мы можем преобразовывать только те выражение и работать только с теми выраж-ми, которые написаны в ОДЗ.

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} \quad \Big| \cdot \sqrt{x-1}, \ \sqrt{x-1} > 0 \text{ по опред.}$$

$$\sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3-6x^2+14x-7}$$

т.к. ОДЗ к $7-x$ и $x-1$ написаны, можем перейти к след:

$$\sqrt{(7-x)(x-1)} < \sqrt{x^3-6x^2+14x-7}$$

$$x^3-6x^2+14x-7 > (7-x)(x-1)$$

$(7-x)(x-1)$ с учётом ОДЗ будет ≥ 0

$\Rightarrow$ решение нер-ва $x^3-6x^2+14x-7 > (7-x)(x-1)$

включит в себя нер-во $x^3-6x^2+14x-7 \geq 0$.

4) Показательные неравенства

Показательные нер-ва бывают двух видов:

I: сводимые к записи $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

II: накладываемые на нер-ва 9 кл.

начнём с нер-в I-ой группы

1) $2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x$

$2^{x^2} \leq 2^2 \cdot 2^x$

$2^{x^2} \leq 2^{2+x}$

$x^2 \leq 2+x$

! если бы основание $\in (0;1)$, то знак меняется на против-ый при переходе к показателям.

2) $5^{3x} > 7$

$5^{3x} > 5^{\log_5 7}$

$3x > \log_5 7$

$x > \dfrac{\log_5 7}{3}$

Теперь разб. нер-ва II группы

3) $6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2$

$6^x + \frac{1^x}{6^x} > 2$

$6^x + \frac{1}{6^x} > 2$

$6^x = t$, $t > 0$

$t + \frac{1}{t} > 2$

4) $25^x + 5^{x+1} + 5^{1-x} + \frac{1}{25^x} \leq 12$

$(5^x)^2 + 5 \cdot 5^x + 5 \cdot \frac{1}{5^x} + \frac{1}{(5^x)^2} \leq 12$

! $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$

! $5^{1-x} = 5 \cdot 5^{-x} = 5 \cdot \frac{1}{5^x}$

Пусть $5^x = t$

! В показ-ных нер-ах для удобной замены сперва стоит числа в показателе превратить в коэф-ты перед степенью.

5) $2^{2x+4} - 16 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+1} + 16 \leq 0$

$16 \cdot (2^x)^2 - 128 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 16 \leq 0$

6) $\dfrac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0{,}5^{2x+3} + 2}{x+1} \leq 0$

ОДЗ

1) $x+1 \neq 0$; $x \neq -1$

$$\dfrac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0{,}5^{2x+3} + 2}{x+1} \leq 0$$

$2^{2x+1} - 96 \cdot 0{,}5^{2x+3} + 2 = 0$ $\qquad x+1 = 0$

И отмечаешь на прямой т. перехода чсл и зн-ля

7) $25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x > 0$

$(5^x)^2 + 3 \cdot 5^x \cdot 2^x - 4 \cdot (2^x)^2 > 0 \quad / : (2^x)^2, \ 2^x > 0$

$\dfrac{(5^x)^2}{(2^x)^2} + \dfrac{3 \cdot 5^x \cdot \cancel{2^x}}{(2^x)^{\cancel{2}}} - 4 > 0$

! $\dfrac{(5^x)^2}{(2^x)^2} = \left(\dfrac{5^x}{2^x}\right)^2 = \left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\right)^2$

$$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{x}\right)^{2}+3\cdot\left(\frac{5^{x}}{2^{x}}\right)-4>0$$

$$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{x}\right)^{2}+3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-4>0$$

5) Логар. нер-ва с числом в основании

Логар. нер-ва с числом в основании бывают двух видов:

I : сводимые к $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ или $> \leq \geq$

II : накладываемые на нер-ва 9 кл.

Ф-лы преобразования логарифмов:

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

$\log_a (b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c|$

2. $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c|$

3. $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$

$\log_a b^k = k \log_a |b|$, если k четная. (если k нечет, то мод. нет)

4. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_{|a|} b$, если k четная (если k нечет, то мод. нет)

5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

6. $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$

7. $b = a^{\log_a b}$

8. $b = \log_a a^b$

формулы нужны для записи чисел через логарифмы

Примеры лог. нер-в из I группы:

1) $\log_7\left(2 + \frac{2}{x}\right) - \log_7 (x+3) \le \log_7 \frac{(6+x)}{x^2}$

Нер-во опр. при

1) $x \neq 0$

2) $x^2 \neq 0$

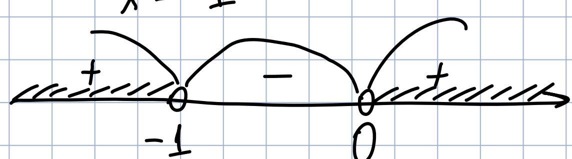
$x \neq 0$

3) $2 + \frac{2}{x} > 0$

$\frac{2x+2}{x} > 0$

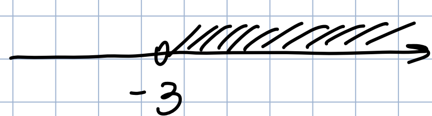
$2x+2=0 \qquad x \neq 0$

$x=-1$



4) $x+3>0$

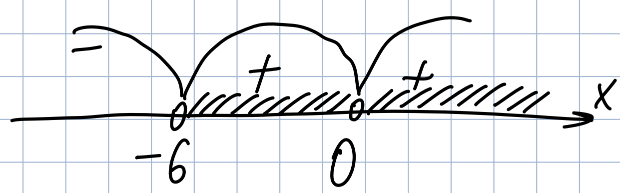
$x>-3$



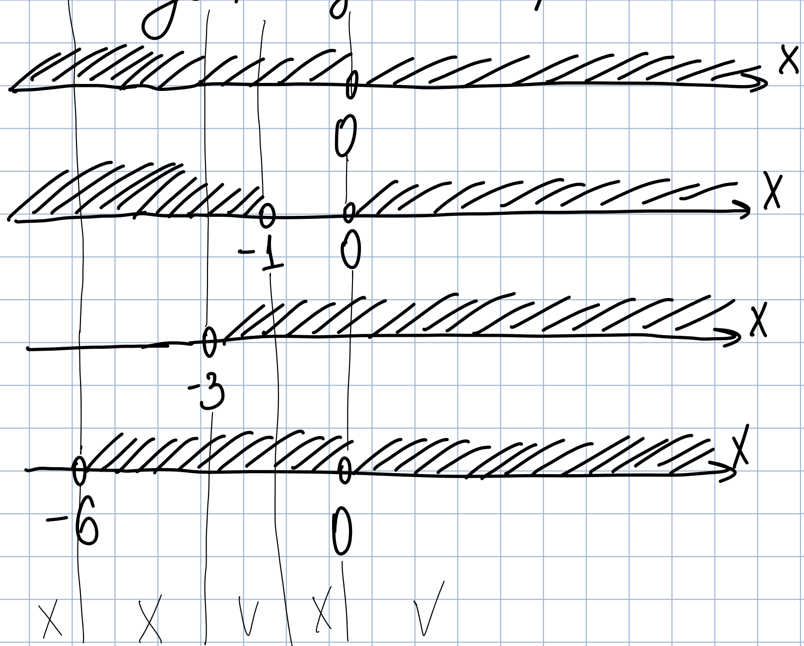
5) $\frac{6+x}{x^2} > 0$

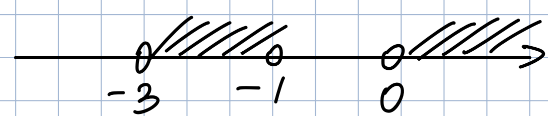
$6+x=0$ $\quad x^2=0$

$x=-6$



Найдем общий интервал



Нер-во опр-о при $x \in$ 

$\log_7\left(2+\frac{2}{x}\right) - \log_7(x+3) \le \log_7 \frac{(6+x)}{x^2}$

! $\log_7\left(2+\frac{2}{x}\right) = \log_7\left(\frac{2x+2}{x}\right) = \log_7|2x+2| - \log_7|x|$, поэтому формулой 2 лучше пользоваться так, как напис-о черным.

$\log_7\left(\frac{2x+2}{x} : \frac{x+3}{1}\right) \le \log_7 \frac{6+x}{x^2}$

$y=\log_7 t \nearrow \Rightarrow$

$$\frac{2x+2}{x(x+3)} \le \frac{6+x}{x^2}$$

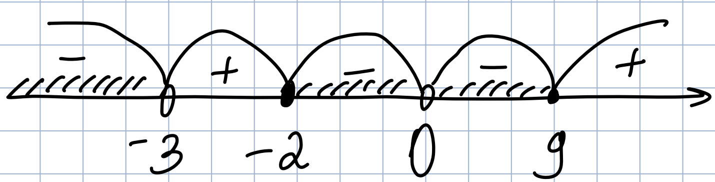
! Если бы основание $\in (0;1)$, то знак при переходе поменялся на против-ый

$$\frac{x(2x+2)-(x+3)(x+6)}{x^2(x+3)} \le 0$$

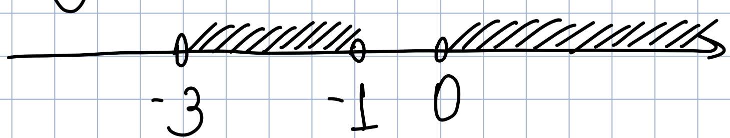
$$\frac{x^2-7x-18}{x^2(x+3)} \le 0$$

$x^2-7x-18=0$ $\qquad$ $x^2(x+3)=0$

$x=9;\ x=-2$ $\qquad$ $x=0;\ x=-3$



С учетом ОДЗ



Ответ: $x \in [-2;-1) \cup (0;9]$

② $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2(x^2-9)-2\right) \geq -1$

Нер-во опр. при

1) $x^2-9>0$

2) $\log_2(x^2-9)-2>0$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2(x^2-9)-2\right) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\log_2(x^2-9)-2 \leq 3$

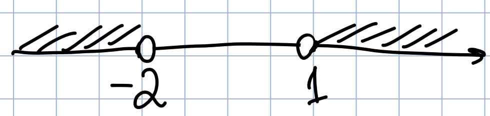
$\log_2(x^2-9) \leq \log_2 2^5$

$x^2-9 \leq 32$

③ $9\log_7(x^2+x-2) \leq 10+\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}$

Нер-во опр. при

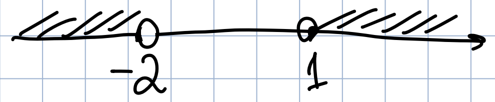
1. $x^2+x-2>0$



3. $x+2 \neq 0$

$x \neq -2$

2. $\frac{(x-1)^9}{x+2}>0$



Нер-во опр. при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

$$9\log_7 (x-1)(x+2) \le 10 + \log_7 |(x-1)^9| - \log_7 |x+2|$$

$$* \quad |(x-1)^9| = (|x-1|)^9$$

$$\cancel{9\log_7|x-1|} + 9\log_7|x+2| \le 10 + \cancel{9\log_7|x-1|} - \log_7|x+2|$$

$$10\log_7|x+2| \le 10$$

$$\log_7|x+2| \le 1$$

$$\log_7|x+2| \le \log_7 7$$

$$|x+2| \le 7$$

! Часто бывает так, что модули уходят, т.к. интервалы ОДЗ раскрывают модули одним случаем.

Разберём лог. нер-ва II группы

4 $$\frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \ge 2\log_2 x$$

Нер-во опр. при

1) $1-2\log_2 x \neq 0$

2) $x>0$

— — —

Пусть $\log_2 x = t$

(5) $x^2 \cdot \log_{16} x \geq \log_{16} x^5 + x\log_2 x$

ОДЗ: ....

$\frac{1}{4}x^2\log_2 x - \frac{5}{4}\log_2 x - x\log_2 x \geq 0$

$\log_2 x\left(\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}\right) \geq 0$

$\log_2 x\left(\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}\right) = 0$

$\log_2 x = 0$ $\qquad$ $\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$

(6) $\log_2^2(-\log_2 x) + \log_2 \log_2^2 x \leq 3$

Нер-во опр. при:

1) $-\log_2 x > 0$

$\Rightarrow \log_2 x < 0$!!! – это важная строчка ОДЗ

$x < 1$

2) $\log_2^2 x > 0$

$\log_2 x \neq 0$

....

— — — —

$\log_2^2(-\log_2 x) + 2\log_2|\log_2 x| \leq 3$

$|\log_2 x| = -\log_2 x$, т.к. $\log_2 x < 0$ по ОДЗ

$\log_2^2(-\log_2 x) + 2\log_2(-\log_2 x) \leq 3$

Пусть $\log_2(-\log_2 x) = t$

(7) $$\frac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)} \leq 0$$

Нер-во опр. при:

⋮

$\log_2(2x^2-17x+35)-1=0$ $\qquad$ $\log_7(x+6)=0$

(8) $\log_3(x+7) + \frac{1}{6}\log_3(x+1)^6 \geq 2$

Нер-во опр. при

1) $x+7>0$

$x>-7$

2) $(x+1)^6>0$

$x \neq -1$

$\log_3(x+7) + \log_3|x+1| \geq 2$

$(x+7)|x+1| \geq 9$, Дальше это обычное нер-во с модулем.

6) Логар. нер-ва с пер-ой в основании

$\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} a(x)$ – общий вид нер-в этой группы.

! $f(x)$; $g(x)$; $a(x)$ тут многочлены с иксом (выражения с иксом)

! оба основания $f(x)$ => там одинаковое выражение с иксом.

! на месте $g(x)$ и $a(x)$ могут быть числа

$\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} a(x)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \geq a(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) \leq a(x) \end{cases} \end{array}\right. \quad + ОДЗ$$

Решение этой совок-сти из 2-ух систем (случаев) будет таким же, как и у более простой для дальнейшей работы системы:

$$\begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - a(x)) \geq 0 \\ ОДЗ \end{cases}$$

! Когда решаешь, начинаешь же с ОДЗ => только первая строчка нас будет интересовать.

Объясним, почему решение сов-сти из двух систем совпадёт с решением системы.

$$(f(x)-1)(g(x)-a(x))\geq 0$$

Или они оба положительны, или оба отрицательны одновременно.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)-1\geq 0\\ g(x)-a(x)\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)-1\leq 0\\ g(x)-a(x)\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geq 1\\ g(x)\geq a(x)\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\leq 1\\ g(x)\leq a(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

$\rightarrow$ с учетом ОДЗ эта строчка будет $0\leq f(x)\leq 1$

Одним словом,

$$\log_{f(x)} g(x)\geq \log_{f(x)} a(x) \longrightarrow (f(x)-1)(g(x)-a(x))\geq 0$$

! функция $\log_{a(x)} f(x)$ и $(a(x)-1)(f(x)-1)$ имеют одинаковые знаки.

! Применять формулу раз-ции можно не всегда — можно тогда, когда следующий шаг — поиск точек перехода для числовой прямой.

①

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$$

Нер-во опр. при:

1) $\frac{25-x^2}{16} > 0$

2) $\frac{25-x^2}{16} \neq 1$

3) $\frac{24+2x-x^2}{14} > 0$ .....

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16}$$

$$\left(\frac{25-x^2}{16} - 1\right)\left(\frac{24+2x-x^2}{14} - \frac{25-x^2}{16}\right) > 0$$

Решаешь это нер-во и пишешь его ответ с учетом ОДЗ.

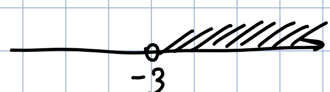
②

$$(x-1)\cdot\log_{x+3}(x+2)\cdot\log_3(x+3)^2 \leq 0$$

Нер-во опр. при

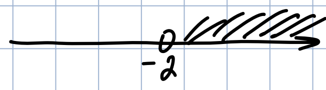
1) $x+3>0$

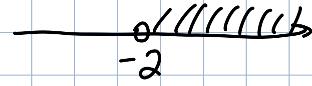
$x>-3$



2) $x+2>0$

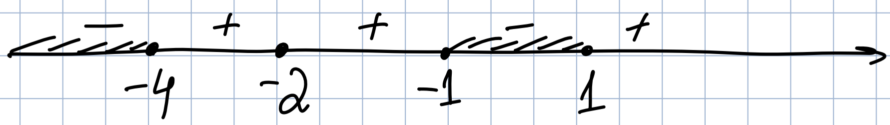
$x>-2$

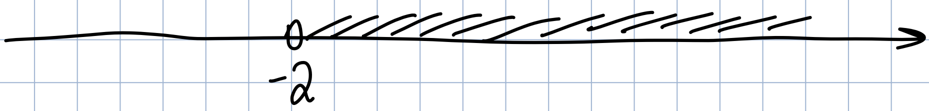


3) $(x+3)^2>0$; $x\neq -3$ Общее: 

$$(x-1)(x+3-1)(x+2-1)\cdot(3-1)((x+3)^2-1)\le 0$$

$$(x-1)(x+2)(x+1)(x+2)(x+4)\le 0$$





Ответ: $x\in[-1;1]$

! $\{-2\}$ почти вошёл в ответ.

! Если заменил лог-м с x-ом в основании на t, то после обратной замены в "системах и совокупностях" применить формулу рационализации.

3) $\log_{\log_x 2x}(9x-4)\ge 0$

Нер-во опр. при

1) $\log_x 2x\neq 1$

$\log_x 2x\neq \log_x x$

$2x\neq x$ (в ур-ниях нет ф. рацион-ии)

$x\neq 0$

2) $\log_x 2x > 0$

$\log_x 2x > \log_x 1$

$(x-1)(2x-1) > 0$

3) $9x-4>0$

$(\log_x 2x - 1)(9x-4-1) \ge 0$

$(\log_x 2x - \log_x x)(9x-5) \ge 0$

$\log_x 2 \cdot (9x-5) \ge 0$

$(x-1)(2-1)(9x-5) \ge 0$

$(x-1)(9x-5) \ge 0$

4) $\log_{2x} 0{,}25 \ge \log_2 (32x) - 1$

Нер. опр. при

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 2x} \ge \log_2 32 + \log_2 x - 1$$

! тут $|x| \to x$ из-за ОДЗ

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}\log_2 (2x)} \ge$$ // — //

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}\cdot(1+\log_2 x)} \geq 5+\log_2 x \quad -1$$

Пусть $\log_2 x = t$

⑤ $\log_{x+1} 2 \leq \log_{3-x} 2$

Нер-во опр. при

$$\frac{1}{\log_2(x+1)} \leq \frac{1}{\log_2(3-x)}$$

$$\frac{\log_2 \frac{3-x}{x+1}}{\log_2(x+1)\cdot\log_2(3-x)} \leq 0$$

$$\frac{(2-1)\left(\frac{3-x}{x+1}-1\right)}{(2-1)(x+1-1)(2-1)(3-x-1)} \leq 0$$

⑥ $$\frac{\log_{7^{x+3}} 49}{\log_{7^{x+3}}(-49x)} \leq \frac{1}{\log_7 \log_{\frac{1}{7}} 7^x}$$

Нер-во опр. при:

$$\frac{(x+3)\log_7 49}{(x+3)\log_7(-49x)} \le \frac{1}{\log_7(-x)}$$

$$\frac{(x+3)\cdot 2}{(x+3)(2+\log_7(-x))} \le \frac{1}{\log_7(-x)}$$

Приводим к общ. знам. и вместо лог-ов ф-лы рац-ии.

5 мин в запасе.

7) Смешанные неравенства

① $(2x+1)\log_5 10+\log_5\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le 2x-1$

Нер-во опр. при:

$$\log_5 10^{2x+1}+\log_5\left(4^{x}-\frac{1}{10}\right)\le 2x-1$$

$$\log_5 10^{2x+1}\cdot\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le\log_5 5^{2x-1}$$

$$10^{2x+1}\cdot\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le 5^{2x-1}$$

② $\dfrac{\log_4(2^x-1)}{x-1}\le 1$

Нер-во опр. при

$$\frac{\log_4(2^x-1)-\log_4 4^{x-1}}{x-1}\le 0$$

Наверху раз-ие и поиск точек перехода.

(3) $$\frac{1-\sqrt{1-8\log_2^2 x}}{2\log_2 x}<1$$

Нер-во опр. при

$$\frac{1-\sqrt{1-8\log_2^2 x}-2\log_2 x}{2\log_2 x}<0$$

$\log_2 x = t$

(4) $$\frac{81^x+2\cdot 25^{x\log_5 3}-5}{(4x-1)^2}\geq 0$$

Нер-во опр. при

$$\frac{(9^x)^2+2\cdot 5^{\log_5 3^{2x}}-5}{(4x-1)^2}\geq 0$$

Числ $=0$ Знам $=0$

(5) $$\sqrt{x+\frac{2}{3}}\cdot\left(\log_2 \log_{\frac{1}{2}}|1+x|\right)\leq 0$$

Нер-во опр. при:

$$\sqrt{x+\frac{2}{3}} \cdot \left(\log_2 \log_{\frac{1}{2}} |1+x|\right) \leq 0 \quad / : \sqrt{x+\frac{2}{3}}$$

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} |1+x| \leq \log_2 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} |1+x| \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$|1+x| \geq \frac{1}{2}.$$

Работу выполнил:
Одикадзе Г.Г.