ЕГЭ Задание 13. Стереометрия

1) Основные теоремы и понятия

2) Сечения

3) Расстояния между объектами

4) Углы между объектами

5) Сборник решенных задач

Данный файл предназначен для получения полной базы, необходимой для начала работы с заданием 13 ЕГЭ.

Теорема 1

Плоскость, причём единственную, можно провести через следующие комбинации фигур:

1. Три точки, не лежащие на одной прямой (Важно знать - если три точки лежат на одной прямой или, другими словами, найдётся прямая, которая одновременно пройдёт через все 3 точки, то будет существовать бесконечное множество плоскостей, проходящих через эти 3 точки. В данном случае нарушается принцип единственности);
2. Прямая и не лежащая на ней точка (Если точка лежит на прямой, то также теряется принцип единственности);
3. Две пересекающиеся прямые;
4. Две параллельные прямые (Данный пункт есть не во всех учебниках, но доказательство того, что через 2 параллельные прямые можно провести плоскость, причём только одну, очень простое и оно следует из пункта 2)

Разберём смысловую нагрузку слова можно на примере пункта 3 (для других пунктов дальнейшее объяснение тоже подходит). Как бы в пространстве ни располагались две пересекающиеся прямые, всегда найдётся плоскость, которая пройдёт так, что обе эти прямые будут в ней находиться. Одним словом, всегда можно провести плоскость такую, в которой будут лежать любые две пересекающиеся прямые.

Теорема 2

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. (Это очень простая и важная теорема, она будет много раз использована при решении задач)

Теорема 3

Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

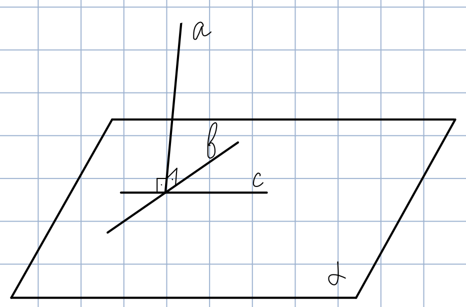
<u>Признак</u> - это информация, наличие и соблюдение которой позволит сделать определенные выводы. Например, признак равнобедренного треугольника - если в треугольнике две стороны равны, то треугольник равнобедренный. То есть наличие 2 равных сторон позволяет сделать вывод, что треугольник особенный - равнобедренный. Признаки нужны для доказательства чего-то.

<u>Свойство</u> - информация, которой можно пользоваться, уже зная что-то. Например, свойство равнобедренного треугольника - если треугольник равнобедренный, то у него есть 2 равные стороны. То есть мы знаем, что треугольник равнобедренный, и делаем отсюда выводы.

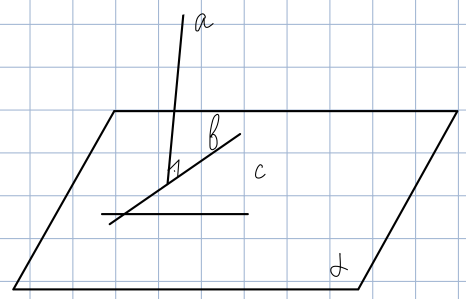
В самом названии теоремы 4 заключён ее смысл - признак перпендикулярности прямой и плоскости содержит информацию, следование которой докажет, что прямая перпендикулярна плоскости. То есть если стоит такая задача - докажите, что прямая перпендикулярна плоскости, то нужно просто доказать, что эта прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости.

Теорема 4

Признак перпендикулярности прямой к плоскости - если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым какой-то плоскости, то эта прямая перпендикулярна плоскости.



! Чаще складывается немного другая ситуация, когда a не пересекает обе прямые, но все равно обеим перпендикулярна.



если $a \perp в$, $a \perp c$, а в и с пересекаются, то $a \perp \alpha$

Теорема 5

Свойство перпендикулярности прямой к плоскости - если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна всем прямым из этой плоскости.

Обращаю своё внимание на следующий факт - если есть хорошее знание признака и свойства перпендикулярности прямой и плоскости (теоремы 4 и 5), то теорема о 3-ех перпендикулярах может не использоваться вообще.

Теорема 6

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой.

Теорема 7

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Теорема 8

Если данная плоскость перпендикулярна другой плоскости, то данная плоскость будет параллельна всем прямым, перпендикулярным второй плоскости.

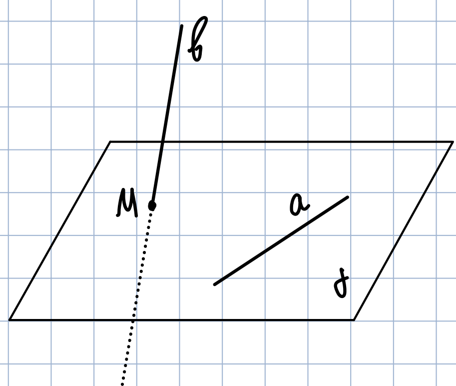
Скрещивающиеся прямые

Решил отдельно вынести эту тему, потому что с ней часто возникают проблемы.

В пространстве прямые могут находиться в следующих позициях:

1. Они пересекаются (Следовательно, лежат в одной плоскости. Другими словами, будет существовать плоскость, которая в пространстве будет находиться так, что обе эти прямые будут лежать внутри этой плоскости = плоскость будет проходить через обе прямые)
2. Они параллельны (также найдётся плоскость, которая будет проходить через обе эти прямые)
3. Они <u>скрещиваются</u> (Уже не будет существовать плоскости, в которой будут находиться обе прямые. По другому - скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости).

Признак (определение) скрещивающихся прямых - Если одна из двух прямых (α) лежит в некоторой плоскости (γ), а другая прямая (в) пересекает эту плоскость (γ) в точке (M), не лежащей на первой прямой (a), то эти прямые скрещиваются.



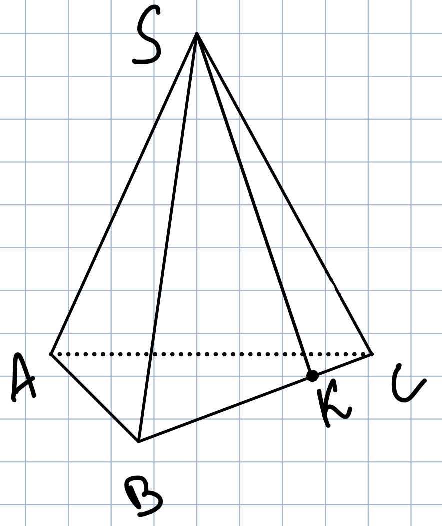
Алгоритм доказательства того, что прямые скрещиваются:

1. Нужно создать (редко) или взять уже имеющуюся (почти всегда) плоскость, в которой лежит одна из

двух прямых, а другая пересекает.

2. Показать, что точка пересечения второй прямой и плоскости не лежит на первой прямой.

Например, докажем, что AB и SK скрещиваются.



1. рассм. пл. ABC (она нам подходит, т.к. AB в ней лежит, а SK её пересекает

2. $SK \cap ABC = K$, $K \notin AB \Rightarrow$

$\Rightarrow SK$ и AB скрещ-ся

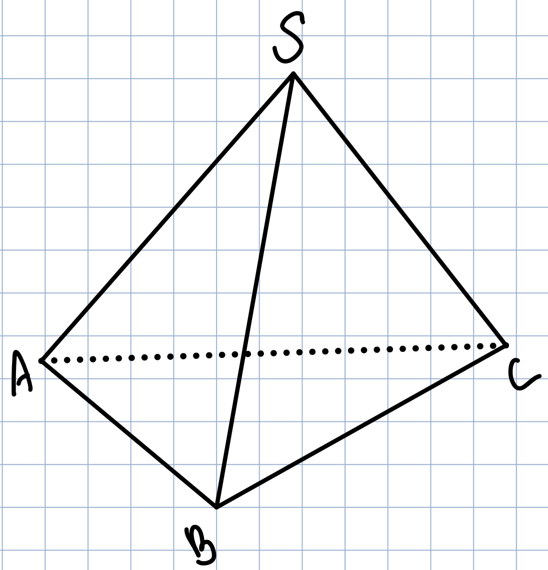
Фигуры

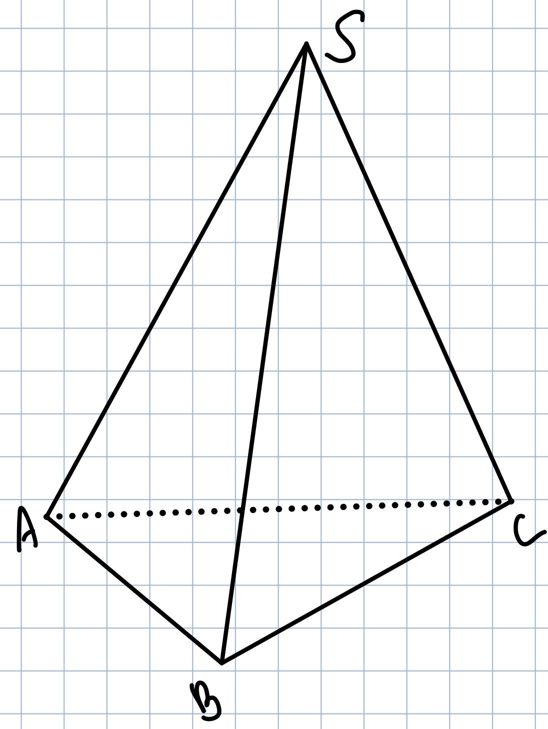
<u>Пирамида</u> - многогранник, где в основании лежит любой n-угольник, а вершина проецируется в любую точку основания. Треугольная пирамида - пирамида, в основании которой лежит треугольник. Четырехугольная пирамида - пирамида, в основании которой лежит четырёхугольник и тд.

<u>Правильная пирамида</u> - пирамида, где в основании лежит правильный n-угольник, а вершина проецируется в центр основания данного n-угольника. Важный момент - все остальные свойства правильной пирамиды, такие как равные боковые рёбра и тд являются следствиями из той информации, данной в определении правильной пирамиды.

<u>Тетраэдр</u> и треугольная пирамида - это абсолютно одно и то же.

<u>Правильный тетраэдр</u> - правильная треугольная пирамида, боковые рёбра и рёбра основания которой равны. Замечу, у правильной треугольной пирамиды боковые рёбра не равны рёбрам в основании, поэтому правильный тетраэдр и правильная треугольная пирамида это не одно и то же!





Это правильный тетраэдр, у него все рёбра равны между собой.

Это правильная треугольная пирамида, у неё рёбра в основании имеют одну длину, а боковые другую

Призма - это многогранник, у которого в основаниях лежат равные и параллельные многоугольники.

Прямая призма - это призма, боковые грани и рёбра которой перпендикулярны основаниям.

Правильная призма - прямая призма, где в основаниях лежат правильные многоугольники. Данное определение начинается со слов прямая призма, что означает, что правильная призма включает в себя все свойства прямой призмы.

Куб - правильная призма, у которой все рёбра равны.

Сечения

Сечение - это многоугольник, каждая сторона которого лежит на грани многогранника.

Сечение - это ограниченная гранями многогранника плоскость, проходящая через заданные элементы.

Сечение может проходить через 3 точки, точку и прямую, точку и параллельно какой-то прямой, точку и перпендикулярно какой-то прямой и тд.

Алгоритм построения сечения через 3 заданные точки (данный алгоритм может использоваться при построении через другие комбинации фигур)

1. Соединить точки, лежащие на одной грани. Данный пункт является самым простым, но в то же время самым важным, потому что все дальнейшие действия при построении сечений должны быть нацелены на поиск двух точек, лежащих в одной плоскости грани многогранника и принадлежащих сечению.
2. Выписать все прямые, которые принадлежат сечению (плоскости сечения). Выписать приоритетные плоскости (приоритетными называются те плоскости, в которых лежит 1 точка сечения). Далее составить подходящую пару из выписанных прямых и плоскостей. Обращаю внимание, что стоит учитывать и плоскости, в которых еще нет ни одной точки, принадлежащих сечению - такие плоскости стоит рассматривать и подбирать им пару только после рассмотрения приоритетных плоскостей.
3. Найти точку пересечения прямой и плоскости из пункта 2. Важно знать - найти точку пересечения прямой и плоскости невозможно по рисунку, поэтому нужно искать точку пересечения прямой из пункта 2 и прямой, которая принадлежит плоскости из пункта 2 и имеющую возможность пересечься с прямой из пункта 2 (другими словами, лежащей в плоскости с прямой из пункта 2). Действие номер 3 делается для получения второй точки, принадлежащей сечению и плоскости грани многогранника - это упоминалось в пункте 1.

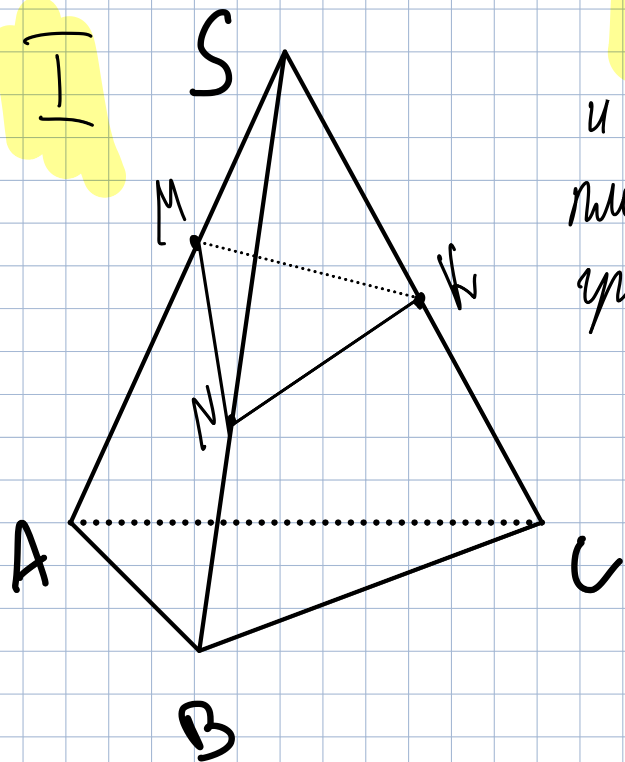
При построении сечений в фигурах, где есть параллельные грани, например, в призмах, можно и иногда нужно пользоваться следующим правилом - Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения этих двух плоскостей с третьей будут параллельны.

Тренировка построений сечений

Постройте сечение, проходящее через точки M, N, K.

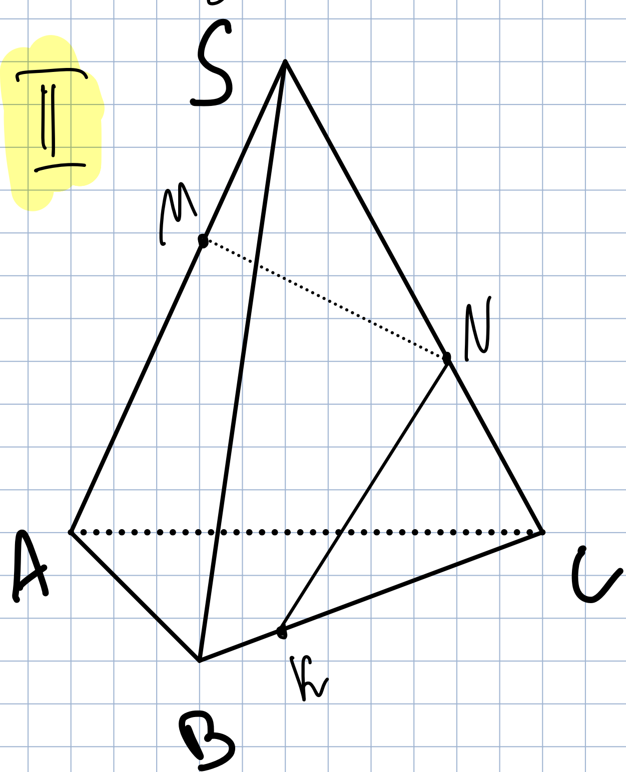
! Построить сечение — найти и построить прямые, по которым плоскость сечения (α) пересекает грани многогранника.

I



Это самое простое сечение. Для его построения нужно воспользоваться только п. 1

II

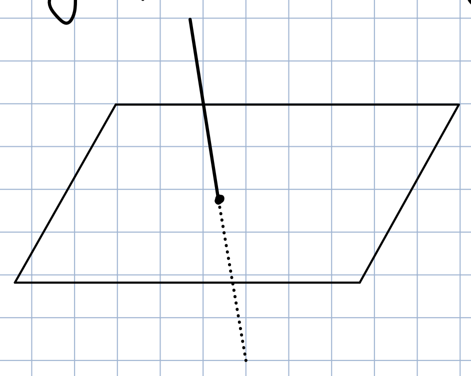


1) Соединим MN и NK, т.к. они лежат на одной грани. Мы нашли и построим прямые пересеч α (MNK) с SAC, SBC.

2) MN и NK - прямые, которые принадлежат сечению. Плоскости ABC и SAB приоритетные грани, т.к. они имеют по одной точке, принадл. сечению (у пл. SAB т.M; у пл. ABC т. K). Работать с пл-ми SAC и SBC, т.к. они законченные.

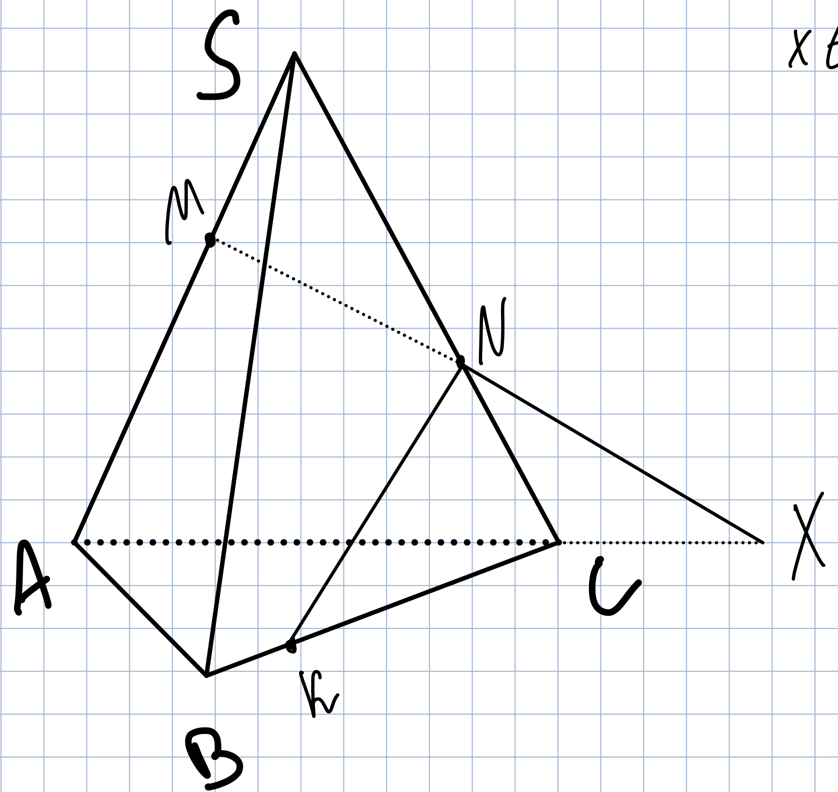
! MN и ABC образуют рабочую пару, так же как и NK и SAB. Рабочую, т.к. MN даст 2-ую точку сечения на пл. ABC

! NK и ABC образуют нерабочую пару, потому что NK и ABC уже пересеклись => Продление NK с любой прямой из пл. ABC не даст вторую точку, принадлежащую сечению. Ведь если прямая пересекла, то второй раз пересечения не будет

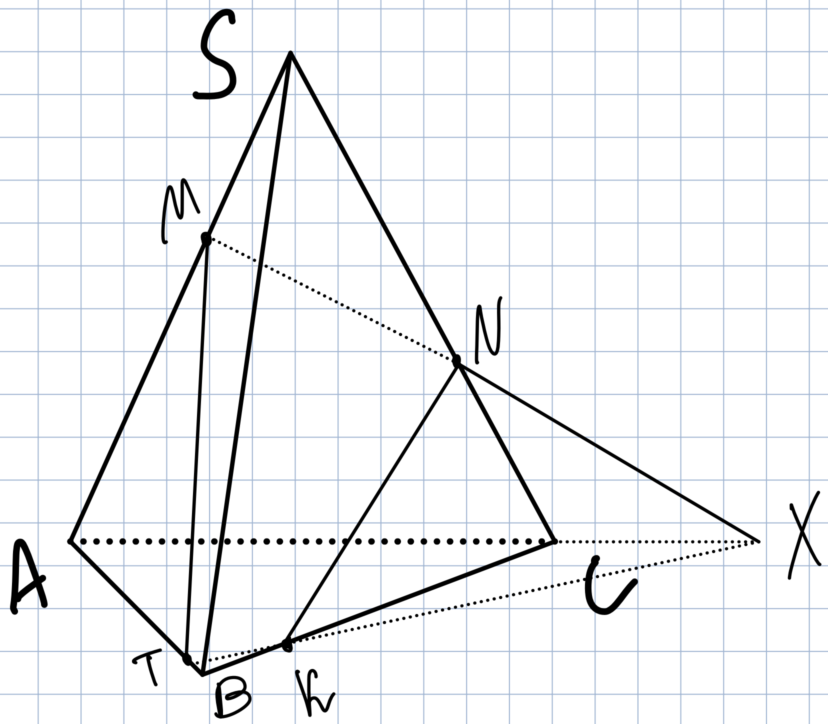


Точно по такой же причине пара MN и пл. SAB являются нерабочими, т.к. $MN \cap SAB = M$

3.1.) Работаем с парой MN и пл. ABC (получаем II т. сечения)
Найти т. пересечения MN и пл. ABC по рисунку невозможно, поэтому нужно найти т. пересеч. MN и прямой из ABC
С какой прямой из пл. ABC пересечется MN? с AC!
т.к. пересекаются только те прямые, которые лежат в одной плоскости (MN и AC $\in$ пл. ASC)
Так же важным часто является анализ свойств точки пересечения MN и AC — точки X. $X \in MN \Rightarrow X \in$ сеч,
$X \in AC \Rightarrow X \in$ пл. ABC



т. X $\in$ сечению и пл. ABC; т. K $\in$ сеч и пл ABC $\Rightarrow$ можем соединить X и K, как мы это делали в п 1.
Обращаю внимание - X и есть наша вторая точка сечения в плоскости ABC.



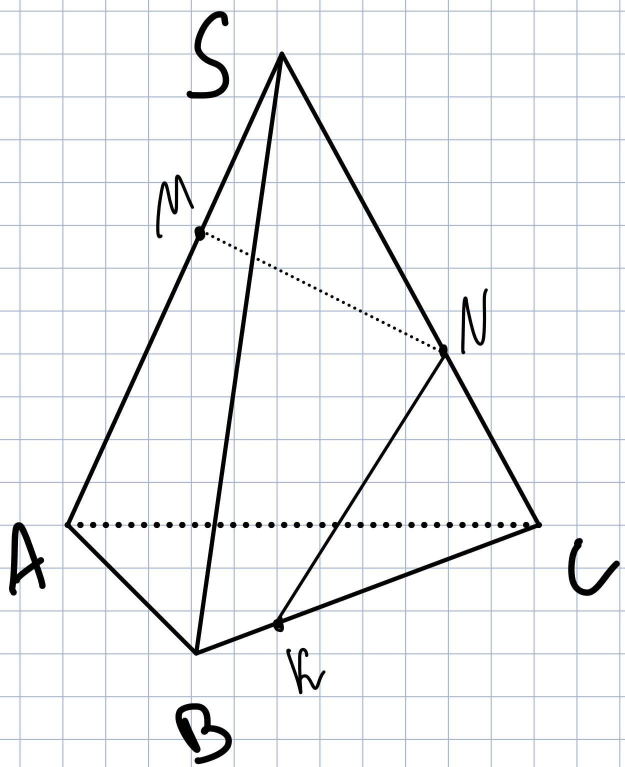
! При соединении и продлении прямой XK нужно подумать, с какой прямой XK по-настоящему пересечется (а не по рисунку). Пересекаются только те прямые, которые лежат в одной плоскости. XK и $AB \in ABC$

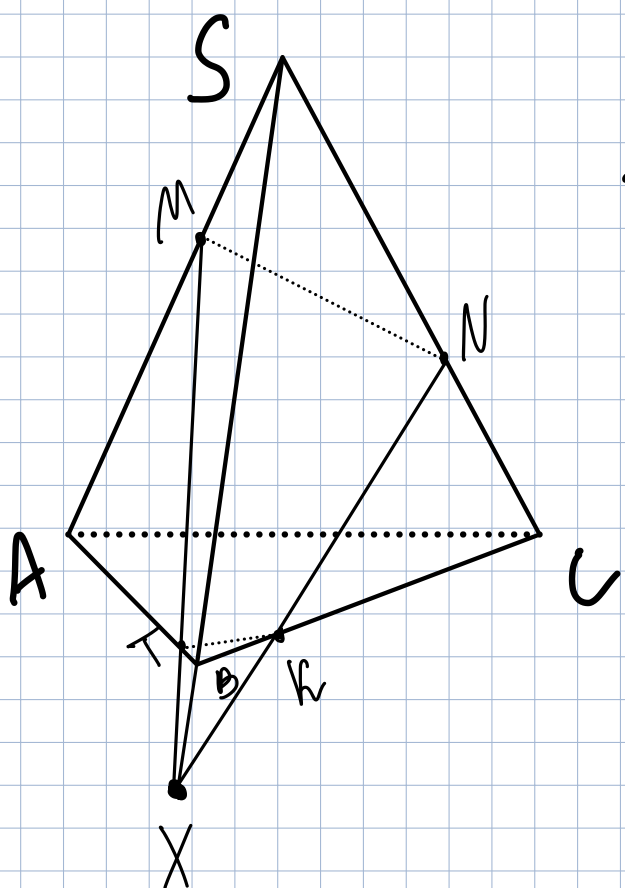
$XK \cap AB = T$, $T \in XK \Rightarrow T \in$ сеч. $\Rightarrow$ можем соединить т. M и T по пункту 1

Сечение MNKT (MNKTM)

Вернемся к определению сечения №1 - действительно, каждая сторона нашего многоуг-ка лежит на грани многогр-ка.

3.2) работаем с другой рабочей парой – NK и SAB





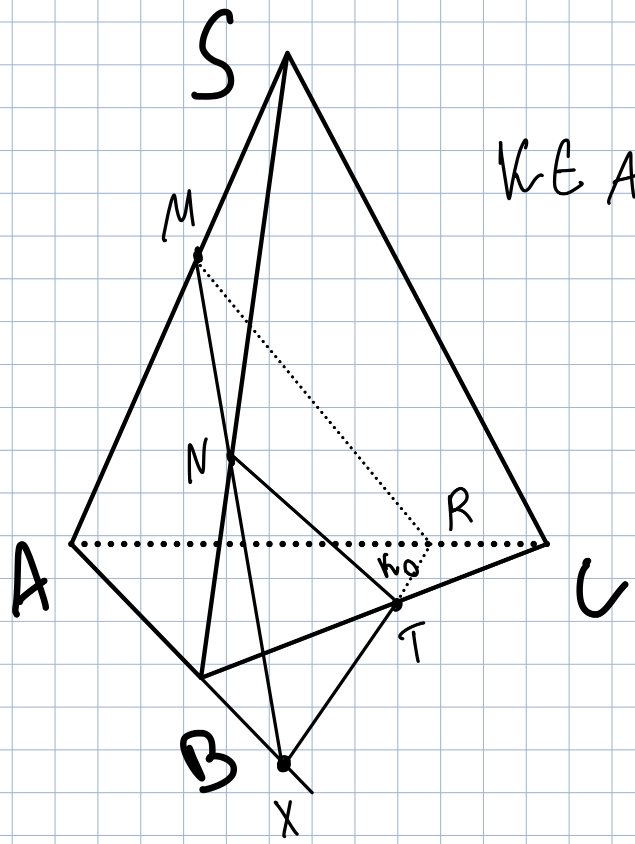
1. продлим NK и SB; получим X

2. соединим XM; XM ∩ AB = T

3. соед. TK

MNKT - искомое сечение

III



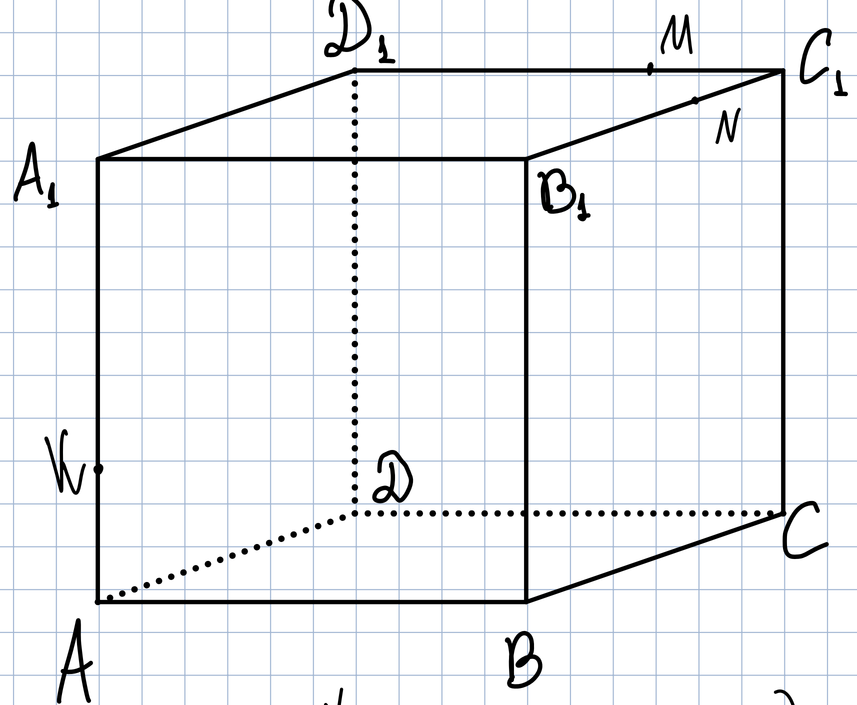
$K \in ABC$.

1. Соединим MN
2. Единств-ая рабочая пара – пл. ABC и MN
3. $MN \cap AB = X$
4. соед. XK ; $XK \cap BC = T$; $XK \cap AC = R$
5. соед. NT и MR

$MNTR$ – искомое сечение.

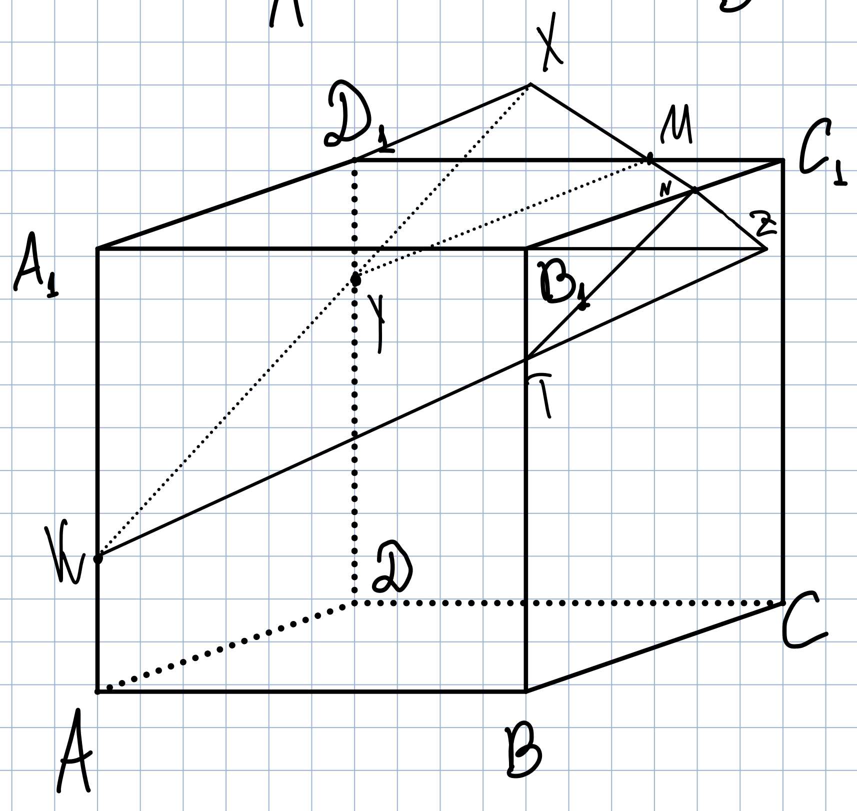
В данном документе не разбирается построение сечений, где нет прямых из п. 1, т.к. этого нет в ЕГЭ.

IV



1) соединим MN

2) $MN \cap A_1D_1 = X$



3) соед XK

4) $XK \cap DD_1 = Y$

5) соед YM

6) $MN \cap A_1B_1 = Z$

7) соед ZK

8) $ZK \cap BB_1 = T$

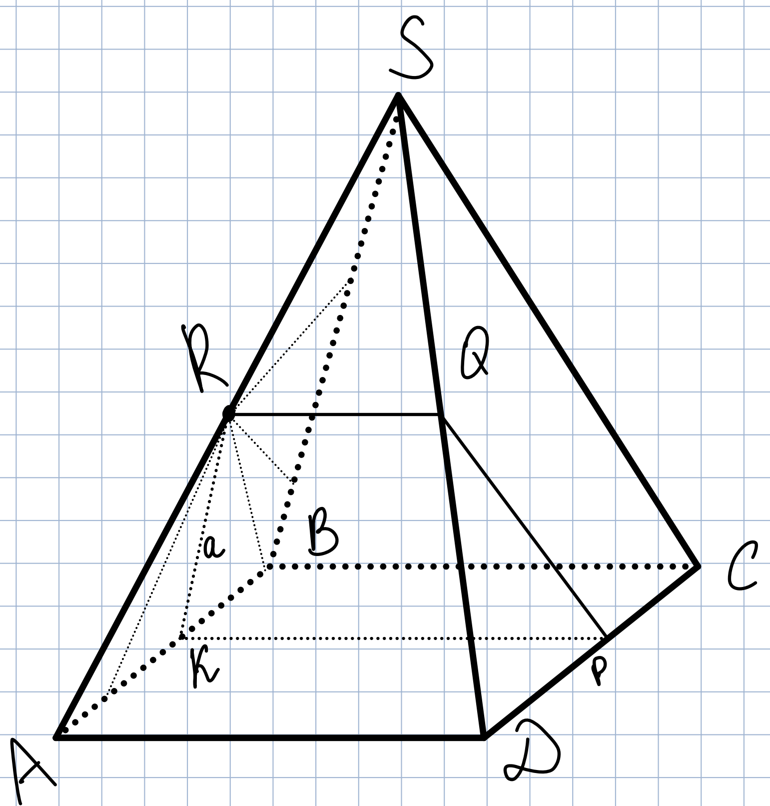
9) соед TN

Сечение MNTKY

! Учитывая, что фигура состоит из пар-ых плоскостей, можно было после получения KY провести прямую через N парал-о KY, т.к. $AA_1D_1D \parallel BB_1C_1C$, а наше сечение (т.е. пл-сть) пересекает оби эти грани в парал-ых прямых. Получилась бы NT

Построение сечений // объектам

I В правильной 4-ех угольной пирамиде SABCD R – середина SA. Построить сечение параллельно SB и BC и проходящее через R



Решение:

1. Пусть наше сечение – α
2. $\alpha \cap SAB = R \Rightarrow \alpha \cap SAB = a \ (R \in a)$ Это по теореме 2
3. a – прямая, по кот-ой пересеклись α и пл. SAB

$\Rightarrow$ 1. $a \in SAB$ $\Rightarrow$ a лежит в пл. SAB и не выходит за границы пл. SAB

2. $a \in \alpha$ $\Rightarrow$ SB не может пересечься с a, иначе SB пересечет α

SB лежит в одной пл. с a и не может её пересечь $\Rightarrow a \parallel SB$

Пусть K – сер. AB; $RK = a$.

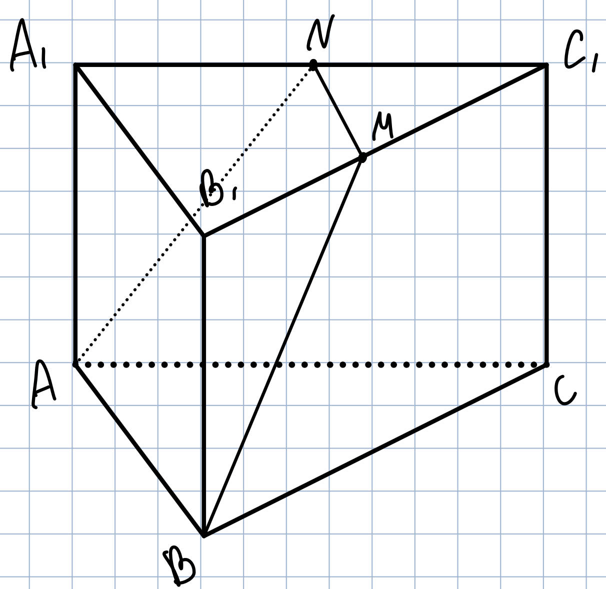
4. Аналогично рассуждаем с пл. ABCD
$\alpha \cap ABC = K \Rightarrow \alpha \cap ABC = b$ $(K \in b)$ .....

$KP = b$

5. Таб. с пл. ASD; $\alpha \parallel BC \Rightarrow \alpha \parallel AD$ или $AD \in \alpha$, но это не так, т.к. $\alpha \cap ASD = R$, а $R \in AD$ – ведь если $AD \in \alpha$, то $\alpha \cap SAD = R$ и AD, а это невозможно)
по аналогии получим RQ, также $\in \alpha$, как и RK и KP

6. Соединим QP; сечение построено

II Дана прав. треуг. призма, N – сер. A_1C_1
Постройте сечение BAN



1) соединим AN

2) Пусть наше сечение α
$A_1B_1 \parallel \alpha \Rightarrow \alpha \parallel A_1B_1$

3) В предыдущем номере подробно объяснено, как получить прямую NM

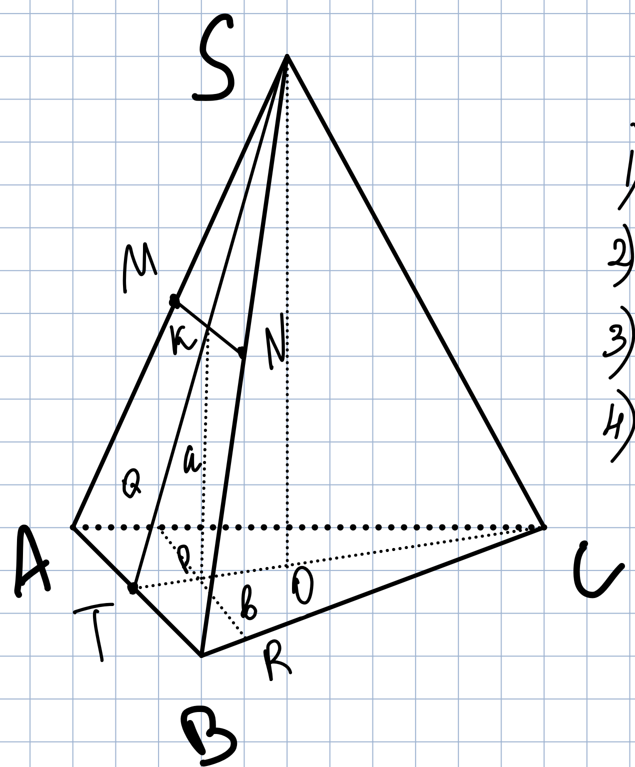
$ANMB$ – сечение.

! В заданиях, где нужно доказать, что плоскость α пересекает ребро в каком-то отношении, нужно при продлении прямых использовать подобные $\triangle$

! Так же важно помнить, что при построении сечений иногда нужно работать с неочевидными плоскостями, например, с пл. BB_1D_1D в кубе, а не рассм-ть только пл-сти $ABCD$, AA_1D_1D и т.д.

Построение сечений ⊥ объектам

I: Дана прав-ая треуг. пир-да. M и N – серед. SA и SB.
Построить сечение (α), если $MN \in \alpha$; $\alpha \perp ABC$



1) по теореме 8 $\alpha \parallel SO$
2) отметим T – сер. AB
3) $ST \cap MN = K$
4) $MN \in \alpha \Rightarrow K \in \alpha \Rightarrow \alpha \cap$ пл. $STC = K$
$\Rightarrow \alpha \cap STC = a$ $(K \in a)$

5) Т.к. $SO \parallel \alpha$, то SO не может пересечь ни одну прямую из пл $\alpha \Rightarrow$ у a существует только 1 позиция
Пусть P – сер. TO; $a = KP$

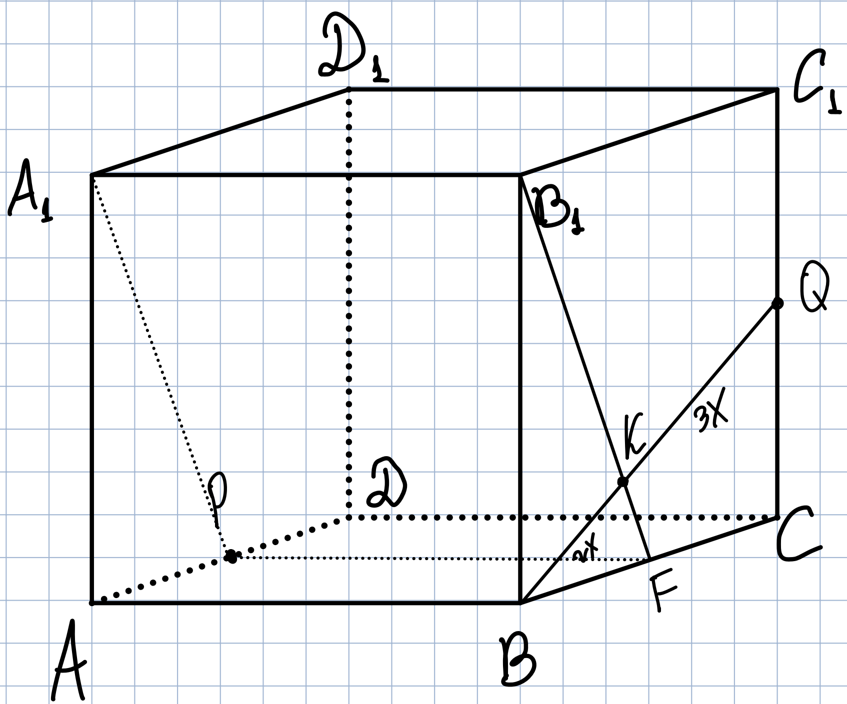
6) $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel \alpha$ (или лежит в ней)

7) $\alpha \cap ABC = P \Rightarrow \alpha \cap ABC = b$ $(P \in b)$
$b \parallel AB$

8) $b \cap BC = R$; $b \cap AC = Q$

9) $QMNR = \alpha$ – искомое сечение

II Дан куб; P и Q – сер. AD и CC_1; Построить сечение α, проход-щее через P и перп-ое BQ. Ребро куба 10.



1) $\alpha \perp PQ \Rightarrow \alpha \cap BQ$

Пусть $\alpha \cap BQ = K$

2) $PK \in \alpha \Rightarrow$ по теореме 5 $BQ \perp PK$

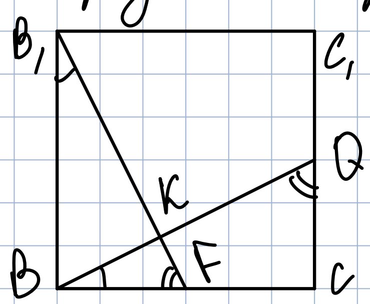
3) Отдельно рисуем $\triangle PBQ$, опускаем высоту из P на BQ и определяем, в каком отнош-ии K делит BQ

Это легко сделать – узнаём, что $BK : KQ = 2 : 3$

4) $\alpha \cap BB_1C_1C = K \Rightarrow \alpha \cap BB_1C_1C = a$ $(K \in a)$

$BQ \perp \alpha \Rightarrow BQ \perp a$. Другими словами, нам нужна прямая в пл. BB_1C_1C, которая проходит через K и $\perp BQ$

Предположим, это B_1F, где F – сер. BC. Докажем, что наше предп-ие верно, т.е. $B_1F \perp BQ$



Т.к. $\triangle B_1BF = \triangle BQC_1$, то $\angle BB_1F = \angle CBQ = \alpha$; $\angle BFB_1 = \angle BQC = \beta$; $\alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow \angle BKF = 90° \Rightarrow B_1F = a$

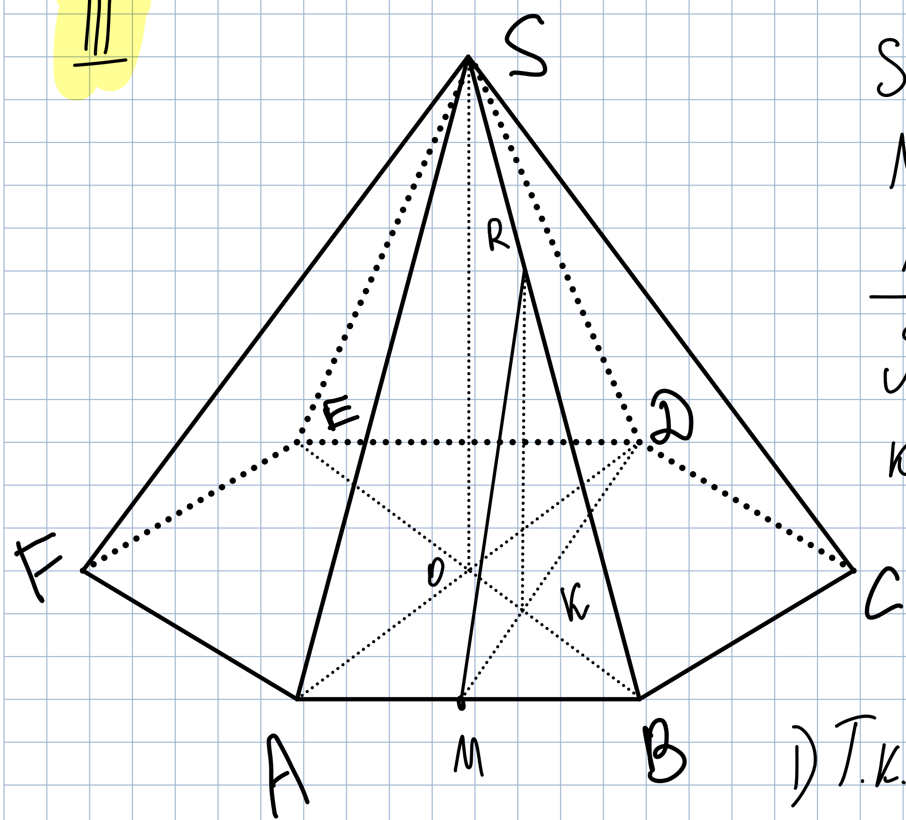
5) Левая и правая грани куба // =>

=> $\alpha \cap$ их в //-ых прямых.

Также $\alpha \cap AA_1D_1D = P$ => проведём прямую, //-ую B_1F и проход-щую через P. Это A_1P

A_1PFB_1 – искомое сечение

III



Дано:
SABCDEF – прав. шест. пир.
M - сер. AB
M и $D \in \alpha$; $\alpha \perp ABC$

Построить прямую, по кот-ой $\alpha \cap SAB$.

1) Т.к. $\alpha \perp ABC$, то $\alpha // SO$

2) $MD \cap$ пл. $SEB = K$ или $\alpha \cap$ пл. $SEB = K$
=> $\alpha \cap SEB = a$ $(K \in a)$

Т.к. $SO // \alpha$, то SO должен быть $// \alpha$ =>
Проведём через K прямую a //-ую SO. $KR = a$

3) соед. MR ; MR - искомая

Расстояния между объектами

В простр-ве сущ. 3 типа объектов: точки, прямые, плос-сти.

В ЕГЭ могут попросить найти расст. (d) между

1) точками[1]

2) точкой и прямой
   а) точка лежит на прямой ⊖
   б) точка не лежит на прямой ⊕[2]

3) т. и плоскостью
   а) т. лежит в пл. ⊖
   б) т. не лежит в пл. ⊕[3]

4) прямыми
   а) прямые пересек-ся ⊖
   б) прямые парал-ы ⊕[4]
   в) прямые скрещ-ся ⊕[5]

5) прямой и плоскостью
   а) прямая ∩ пл. ⊖
   б) прямая ∥ пл. ⊕[6]

6) плоскостями
   а) пл-сти ∥ ⊕[7]
   б) пл-сти ∩ ⊖

! + значит, что такое задание м.б, а минус не может быть.

1. Точками

2. Точкой и прямой

3. Точкой и плоскостью

4. Парал-ми прямыми — поиск расстояния между пар-ми прямыми происходит следующим образом — берётся любая точка I прямой, и от нее ищется расстояние до II прямой. Т.е. п 4 сводится к п 2.

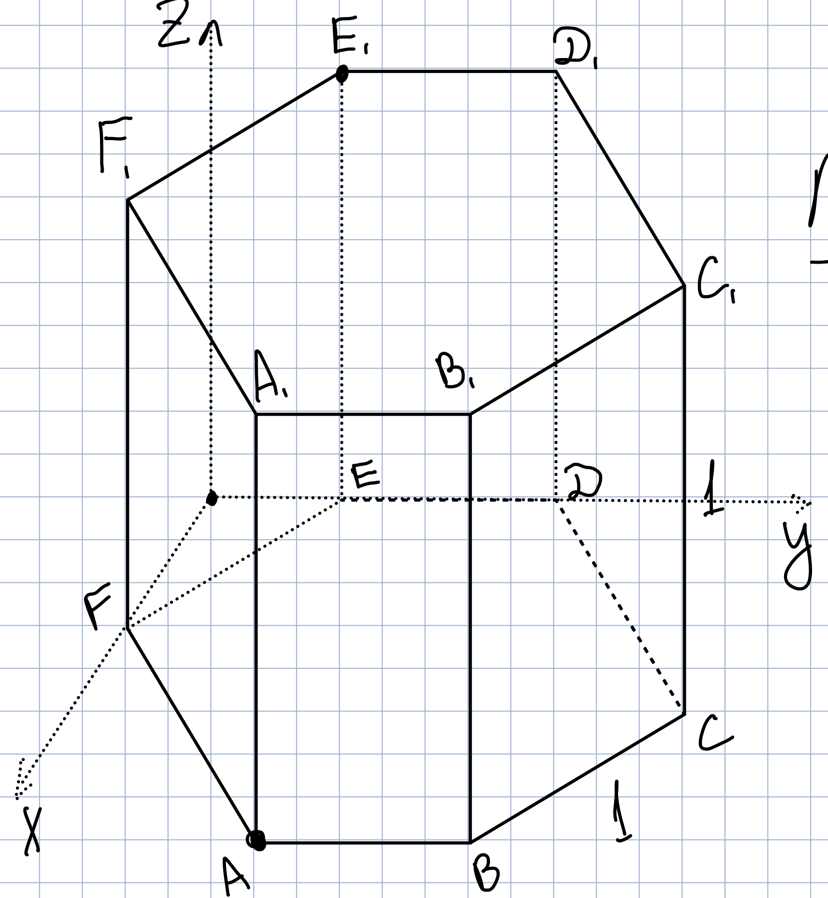
5. Скрещивающимися прямыми

6. Прямой и парал-ой ей плоск-ью — берется любая

точка прямой и от неё ищется расстояние до пл-сти.
Т.е. п 6 сводится к п. 3.

7. **Параллельными плоскостями** — берется любая точка I плоскости, и от нее ищется расст. до II пл-сти. Т.е. п 7 сводится к п. 3.

1. Расстояние между точками



Дано:
Прав. шест. пр., у которой все ребра 1

Найти $d(A; E_1)$

I способ – классический

$d(A; E_1) = AE_1$

Найдём AE_1 в $\triangle AEE_1$

1) $\angle AFE = \dfrac{180 \cdot 4}{6} = 120^\circ$

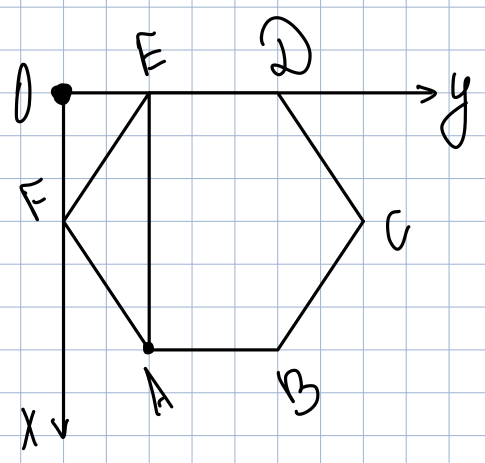
2) $AE^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ (теор. кос)

$AE = \sqrt{3}$

$AE_1 = \sqrt{3+1} = 2$

II способ – метод коорд.

$\angle OFE = \dfrac{180-120}{2} = 30^\circ \Rightarrow \triangle OFE$ можно решить



$A(\sqrt{3}; \frac{1}{2}; 0)$

$E_1(0; \frac{1}{2}; 1)$

$AE_1 = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$

$AE_1 = \sqrt{3 + 0 + 1} = 2$

! Расст. м/у точками м.б. найдено как сторона $\triangle$, так и отрезок внутри $\triangle$. Часто исп-ся теорема косинусов

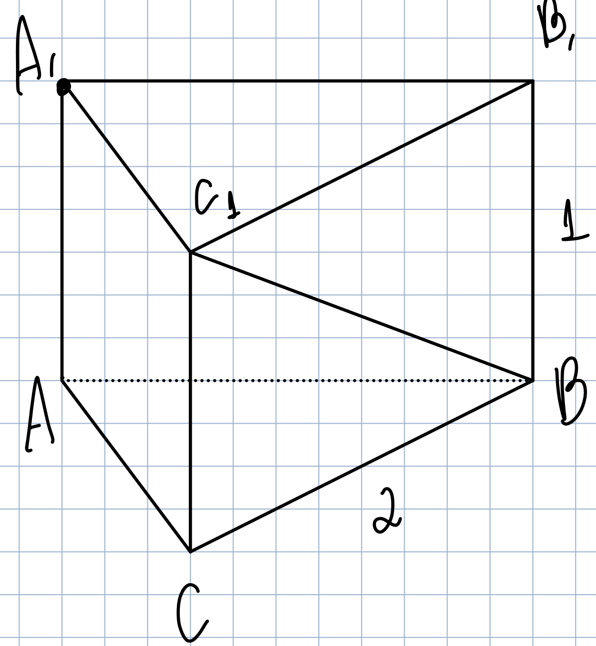
! Углы между осями системы координат 90, поэтому оси x и y не могут лежать на ED и FE соотв-о.

2. Расстояние от точки до прямой

Поиск расстояния от точки до прямой будем искать только классическим способом, потому что искать методом коорд-т очень сложно

Поиск расстояния от точки C до D_1E_1, например, должен происходить в Δ с 3-мя этими вершинами, т.е. в $\Delta\ CD_1E_1$

I

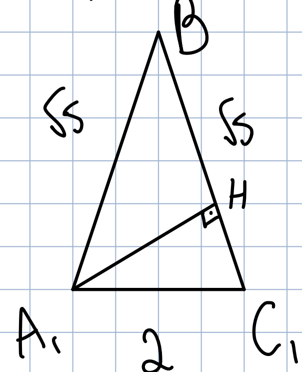


Дано:

Прав. треуг. призма; $BC = 2$; $BB_1 = 1$

Найти $d(A_1; BC_1)$

1)



$A_1C_1 = 2$

$C_1B = \sqrt{5}$

$A_1B = \sqrt{5}$

$4 = 5 + 5 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos B$

$\cos B = \frac{3}{5}$

2) $\frac{3}{5} = \frac{BH}{\sqrt{5}}$; $BH = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$$A_1H = \sqrt{5 - \frac{9}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

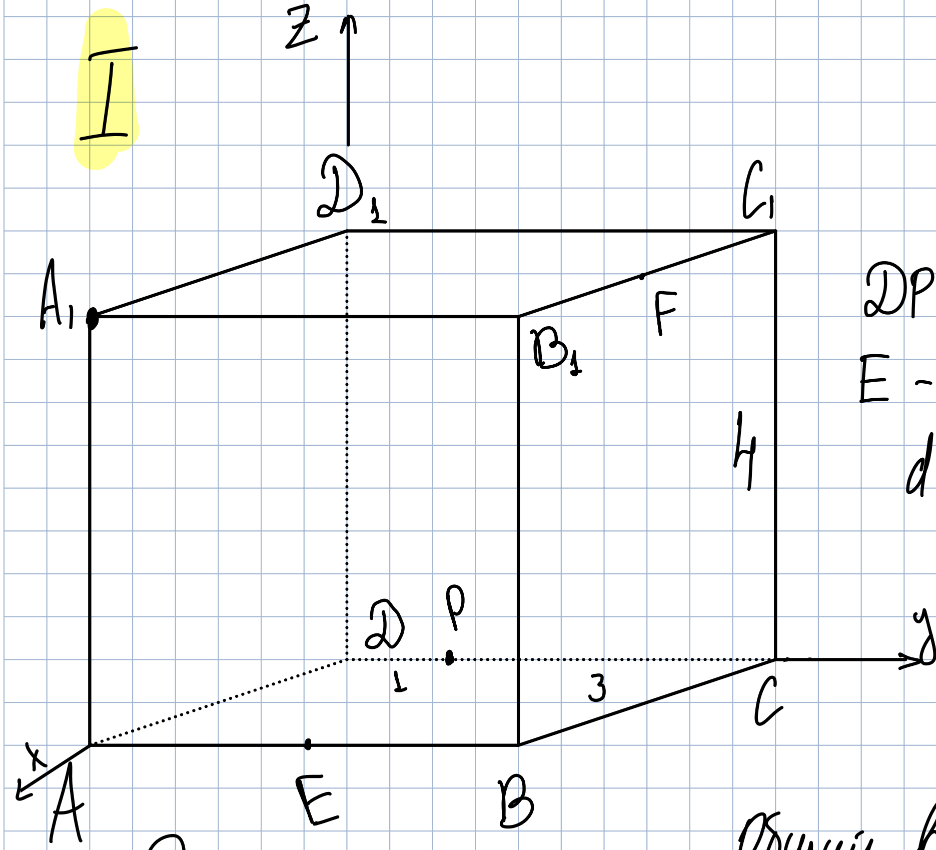
Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

! Чтобы найти расст-ие в Δ-ке от вершины до стороны, нужно сперва найти длины 3-ех сторон и, скорее всего, применить 1 раз теорему кос-ов

3. Расстояние от точки до плоскости

1) Делать это классическим путем бывает очень сложно, поэтому будет разобран только метод координат - нужно будет выводить ур-ие плоскости

I



Дано
куб, все ребра 4.
$DP : PC = 1:3$; F - сер. B_1C_1;
E - сер. AB
$d(A_1; EPF)$ - ?

Общий вид ур-ия пл-сти:
$ax + by + cz + d = 0$

Решение

$$A_1 \begin{pmatrix} \overset{x_0}{4} ; \overset{y_0}{0} ; \overset{z_0}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E\,(4;2;0) \\ P\,(0;1;0) \\ F\,(2;4;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+d=0 & ② \\ b+d=0 & ① \\ 2a+4b+4c+d=0 & ③ \end{cases}$$

① $b = -d$

② $4a - 2d + d = 0 \qquad a = \frac{d}{4}$

③ $\frac{d}{2} - 4d + 4c + d = 0$

$c = \frac{5d}{8}$

$\frac{d}{4}x - dy + \frac{5d}{8}z + d = 0 \quad | : d$

$\frac{1}{4}x - 1y + \frac{5}{8}z + 1 = 0$

В общем, $a = \frac{1}{4}$; $b = -1$; $c = \frac{5}{8}$; $d = 1$ ($d = 1$ всегда, если a, b, c выражал через d)

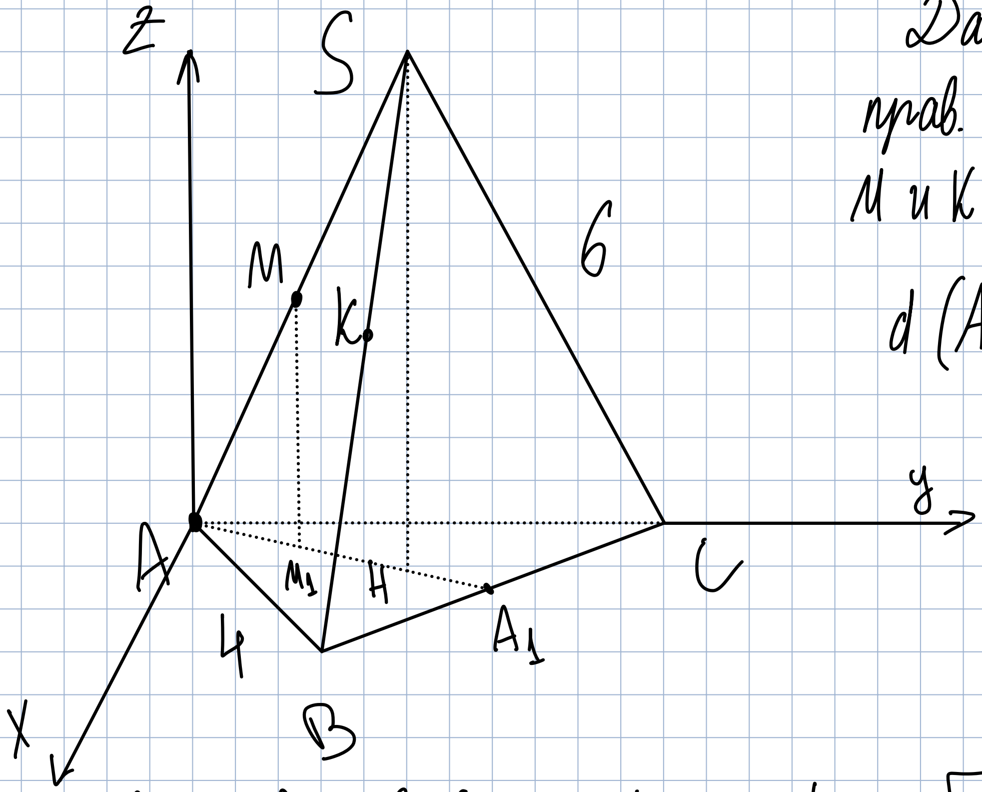
$$d(A_1; EPF) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(A_1; EPF) = \frac{|4 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot (-1) + \frac{5}{8} \cdot 4 + 1|}{\sqrt{\frac{1}{16} + 1 + \frac{25}{64}}} = \frac{12\sqrt{93}}{31}$$

Ответ: $\frac{12\sqrt{93}}{31}$

II Разберём самую сложную фигуру с точки зрения поиска координат – треуг-ая пирамида

! Поиск координат точки должен происходить только в пл-сти, $\perp$-ой пл-сти основания. Т.е. в след-ей задаче поиск координат т. М должен происходить в пл-сти ASA_1, т.к. $ASA_1 \perp$ пл. ABC, ведь ASA_1 проходит через SH (теорема 12 - ищи её ниже)



Дано:

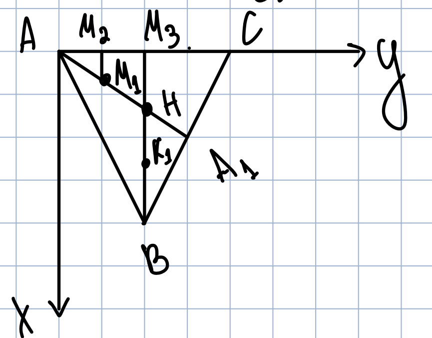
прав. $\triangle$ пир; $AB = 4$; $SC = 6$

M и K - середины

$d(A; CMK)$ - ?

$A(0;0;0)$ $C(0;4;0)$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1; \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}\right)$ $K\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; 2; \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}\right)$

Разберём подробно поиск координат т. M. (искали в пл. ASA$_1$)



! коорд. x и y т. M совп. с M_1

1) $AM_2 = 1 \Rightarrow y = 1$

2) $tg\,30 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{M_2M_1}{AM_2}$; $\frac{M_2M_1}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$M_2M_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = x$

3) $AA_1 = 2\sqrt{3}$; $AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$SH = \sqrt{36 - \frac{16}{3}} = \frac{2\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$

$z = MM_1 = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}$

Поиск коорд т.K схож с поиском к-т M.

$$\begin{cases} 4b + d = 0 \longrightarrow b = -\dfrac{d}{4} \longrightarrow b = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}a + b + \sqrt{\dfrac{23}{3}}c + d = 0 \\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3} + 2b + \sqrt{\dfrac{23}{3}}c + d = 0 \end{cases} \Bigg| -$$

$$\sqrt{3}a + b = 0 \longrightarrow a = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$c = \frac{-5\sqrt{3}d}{6\sqrt{23}} = \frac{-5\sqrt{3}}{6\sqrt{23}}$$

$$a = \frac{1}{4\sqrt{3}}; \quad b = -\frac{1}{4}; \quad c = \frac{-5\sqrt{3}}{6\sqrt{23}}; \quad d = 1$$

$$d = \frac{|\ 1\ |}{\sqrt{\frac{1}{48} + \frac{1}{16} + \frac{75}{828}}} = \frac{\sqrt{23}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{23}}{2}$

! Коорд по z т.M – то, на сколько т.M отдалена от пл. XOy; коорд по x – от пл. ZOY; по y – XOZ.

! Самое сложное в этой задаче – поиск координат точек

! В 99% задач можно выразить a, b, c через d. Но есть задачи, где это сделать не получится, т.к. в этой задаче $d = 0$. ($d = 0$, если, например, ты выводишь уравне-

ние плоскости, проходящее через начало координат
Разберём пример, как выходить из этой ситуации.

Например, найти $d(A; BKC)$, если

$A(2;0;0)$

$$\begin{cases} B(0;0;0) \\ K\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right) \\ C(0;2;0) \end{cases} \qquad \begin{cases} d=0 \\ \frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+\frac{2}{3}c+d=0 \\ 2b+d=0 \longrightarrow b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=0 \\ \frac{4}{3}a+\frac{2}{3}c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$d=0 \Rightarrow$ выражать a, b, c через d нельзя. Выразить можно через a или c; выразим через c.

$$a=-\frac{2}{3}c\cdot\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}c$$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2};\ b=0;\ c=1$ (то, через что выразим, будет $=1$); $d=0$

! При поиске объёма фигуры нужно знать площадь основания и высоту. И вот длину высоты можно найти как расст. от точки до пл-сти

5. Расст. между скрещ-ся прямыми

Поиск расст. м/у скрещ-ся прямыми самый сложный среди поиска расстояний

Расст. м/у скр. пр - длина их общего перп-ра, т.е. длина отрезка, перп-го обеим прямым

Есть 2 способа получения этого отрезка

1. Классический

при помощи теорем 4 и 5 доказывается, что какой-то отрезок ⊥ обеим прямым. Частым дополнит-ым построением является проведение высот с послед-щим док-вом перп-сти какой-то прямой к 2-ум скрещ-ся пр-м.

2 Метод координат

1) создается вспом-ая пл-сть, которая получится при парал-ом переносе одной из прямых до пересечения с другой.

2) Далее нужно будет найти расстояние от прямой, которую мы переносили, до получившейся пл-сти. Учитывая, что мы ищем расст. от прямой до парал-ой ей плоскости, то поиск сведется к нахождению расст. от любой точки прямой до плоскости. Расстояние от точки до плоскости - длина высоты (перпендикуляра) от этой точки до плоскости. А эта высота и будет перпендикулярна обеим исходным прямым => длина этого отрезка нам и нужна.

I:

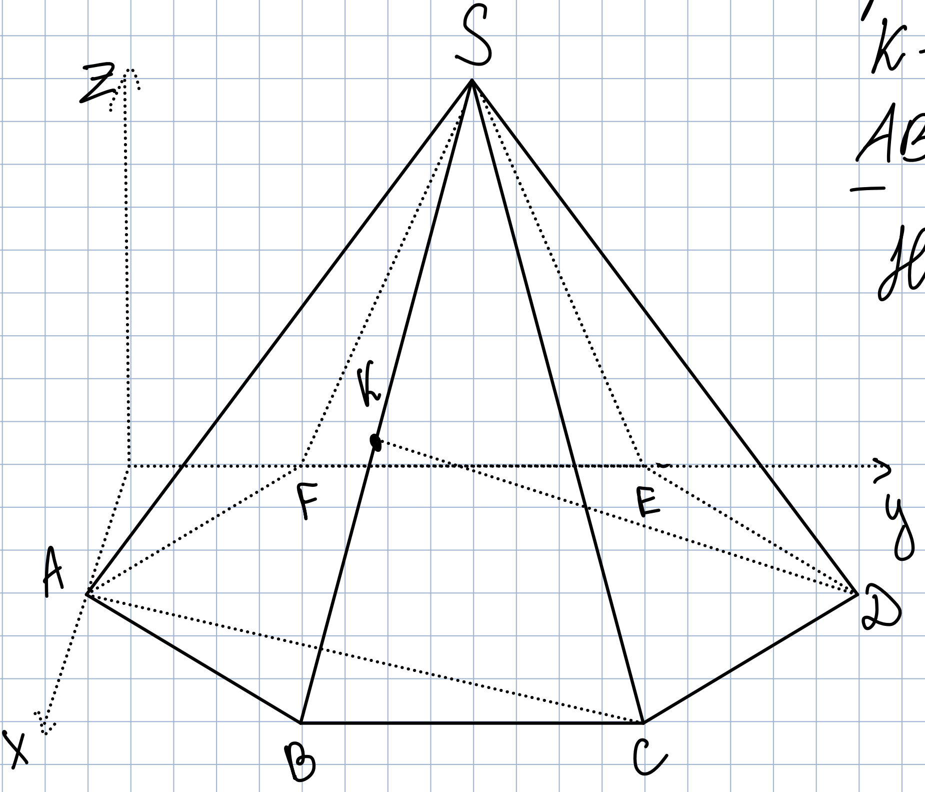
Дано:

Прав шест. пир

K - сер. SB

AB = 5; SD = 8

Найти $d(\widehat{AC; DK})$



Решение методом коорд-т

1) Переносим AC в пл. ABC до пересеч. с D. Это FD
пл. FDK - наша вспом-ая пл-сть

2) Нужно найти длину отрезка, перпенд-го AC и KD. Для этого найдем расст-ие от A до пл FDK. Расст. от A до пл FDK - отрезок, перпенд-ый пл. FDK и исходящий из A => это отрезок, перп FD и DK => это отрезок, перп-ый FD и AC => это и есть искомый отрезок.

$d(\widehat{AC; DK}) = d(\widehat{A; FDK})$

Ищем $d(\hat{A;FDK})$

$A\left(\frac{5\sqrt3}{2};0;0\right)$

$$\begin{cases} F\left(\frac{5\sqrt3}{2};10;0\right) \\ D(0;2{,}5;0) \\ K\left(\frac{15\sqrt3}{4};\frac{15}{4};\frac{\sqrt{39}}{2}\right) \end{cases}$$

1) $2{,}5b+d=0 \longrightarrow b=-\frac{2}{5}d=-\frac{2}{5}$

2) $\frac{5\sqrt3}{2}a-4d+d=0$

$a=\frac{6}{5\sqrt3}$

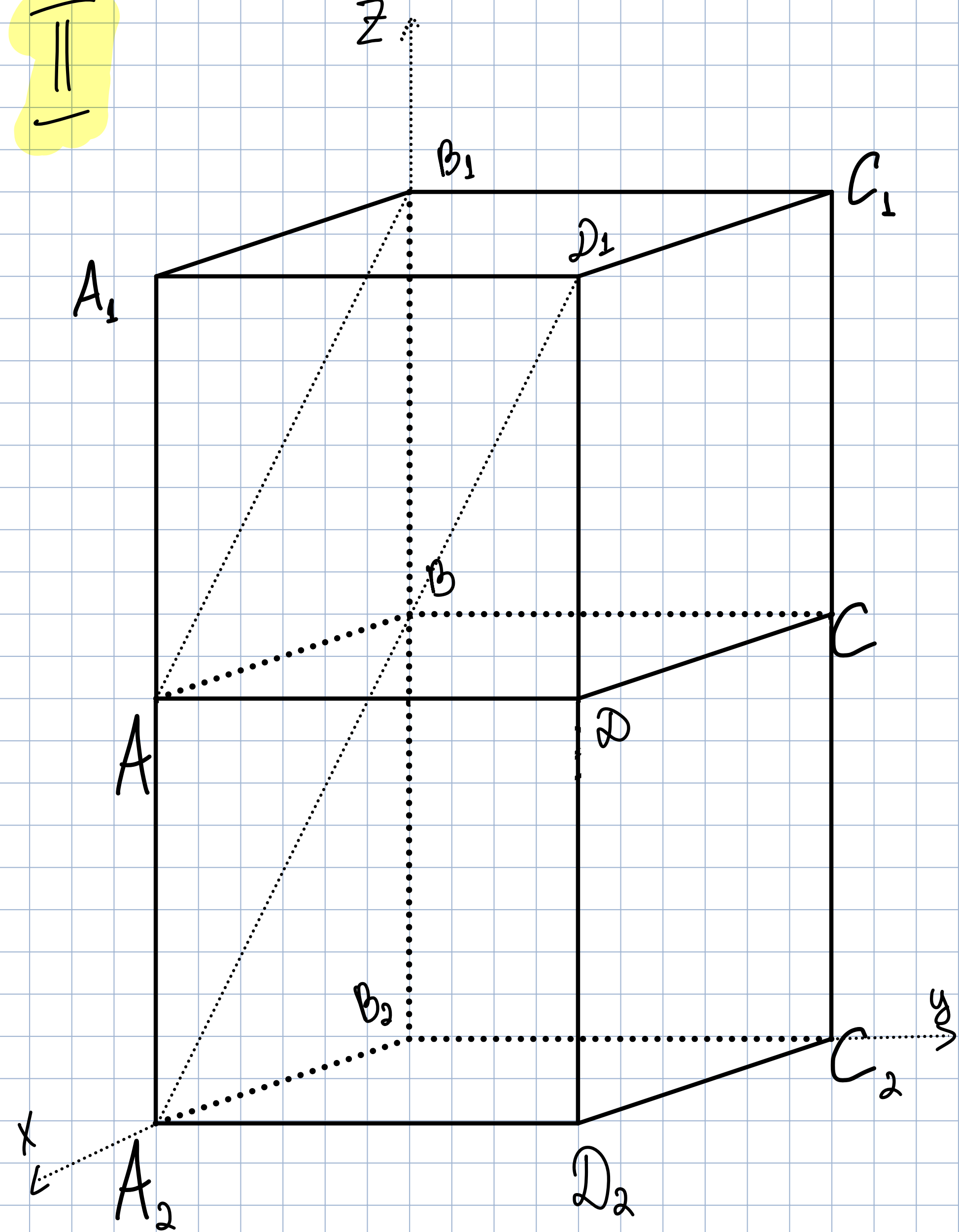
3) $\frac{15\sqrt3}{4}\cdot\frac{6}{5\sqrt3}d-\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}d+\frac{\sqrt{39}}{2}c+d=0$

$$S=\frac{\left|\frac{5\sqrt3}{2}\cdot\frac{6}{5\sqrt3}+1\right|}{\sqrt{\frac{36}{75}+\frac{4}{25}+\frac{64}{39}}}=\frac{5\sqrt{39}}{\sqrt{139}}$$

! $d(\hat{C\,FDK})=d(\hat{A\,FDK})$, если что

! Ответы часто кривые, но они верные.

II



Дано:
куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$
все ребра 2

Найти $d(AB_1 \hat{;} BD_1)$

Решение

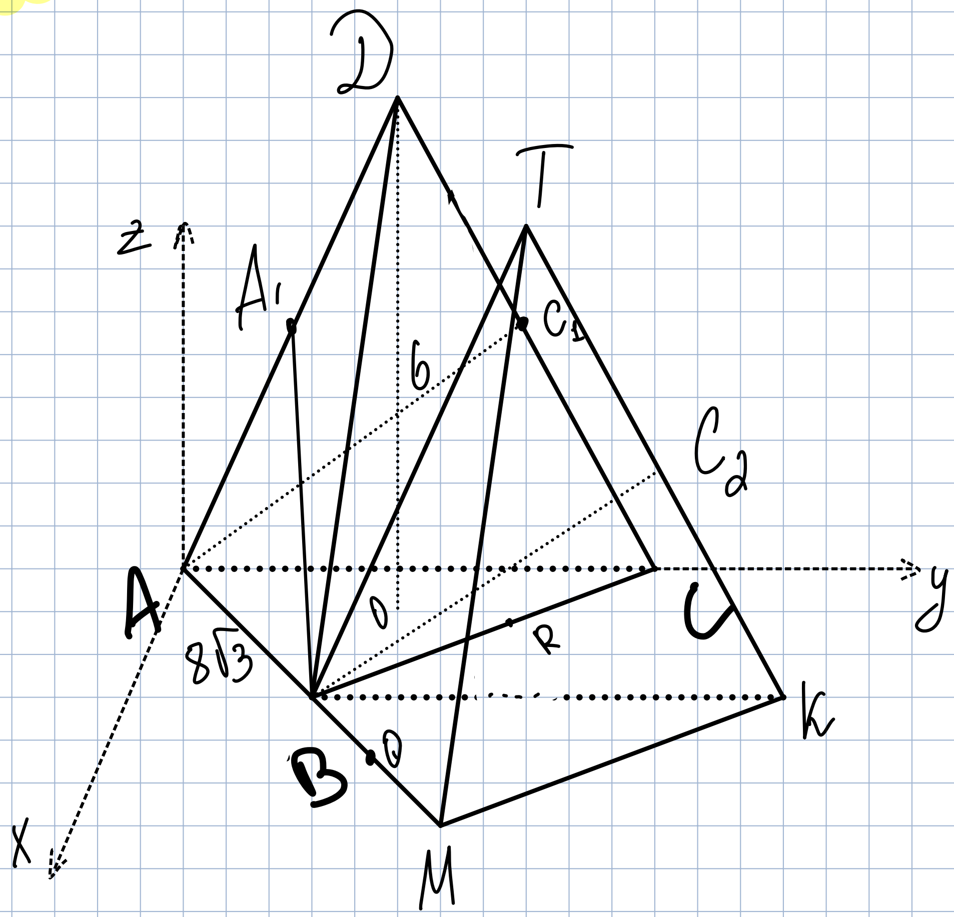
1) Достроим для дальн-го пар-го переноса куб снизу $A_2B_2C_2D_2ABCD$. Введем систему координат в т. B_2

2) Перенесём до пересечения $AB_1 \to A_2B$

3) $d(AB_1 \hat{} BD_1) = d(A \hat{} A_2 BD_1)$

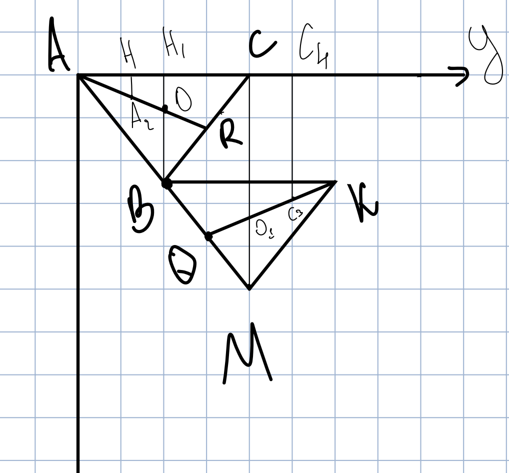
III: $DABC$ - прав треуг. пир; $AB = 8\sqrt{3}$; $DO = 6$; A_1 и C_1 - сер.

$d(\widehat{BA_1; AC_1})$ - ?



1) $AC_1 \parallel BC_2$

2) $d(\widehat{AC_1 A_1B}) = d(A; A_1BC_2)$



$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{A_2H}{2\sqrt{3}}$$

$A_2H = 2$

$A(0;0;0)$

$A_1(2; 2\sqrt{3}; 3)$

$B(12; 4\sqrt{3}; 0)$

$C(14; 10\sqrt{3}; 3)$

$$\begin{cases} 12a + 4\sqrt{3}b + d = 0 \\ 2a + 2\sqrt{3}b + 3c + d = 0 \\ 14a + 10\sqrt{3}b + 3c + d = 0 \end{cases} \Big| -$$

$$12a + 8\sqrt{3}b = 0$$

$$a = -\frac{2\sqrt{3}b}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-8\sqrt{3}b + 4\sqrt{3}b + d = 0$$

$$b = -\frac{1}{6}$$

$$c = -\frac{7}{18}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{48} + \frac{1}{36} + \frac{49}{18 \cdot 18}}} = \frac{36\sqrt{259}}{259}$$

Углы между объектами

В этом документе будет разобран поиск угла между:

1) Прямыми

2) Прямой и плоскостью

3) Плоскостями

Каждый параграф далее будет состоять из 3 частей: общий поиск угла, док-во парал-сти объектов и перпенд-сти объектов.

! Проводить высоту из точки на плоскость нельзя, т.к. по стереометрическому рисунку нельзя понять, в какой точке прямая (высота из т. на пл) пересекает пл-сть. Поэтому для построения (получения) высоты из т. на плоскость (α) нужно сперва провести высоту из этой т. на определенную прямую, лежащую в пл. α, а потом доказать, что эта высота из т. на прямую явл. высотой из т. на пл. (α).

! Найти точку пересечения плоскости (α) с прямой (a) или плоскостью невозможно. Поэтому нужно искать точку пересечения прямой из пл. α с прямой a

Угол между прямыми

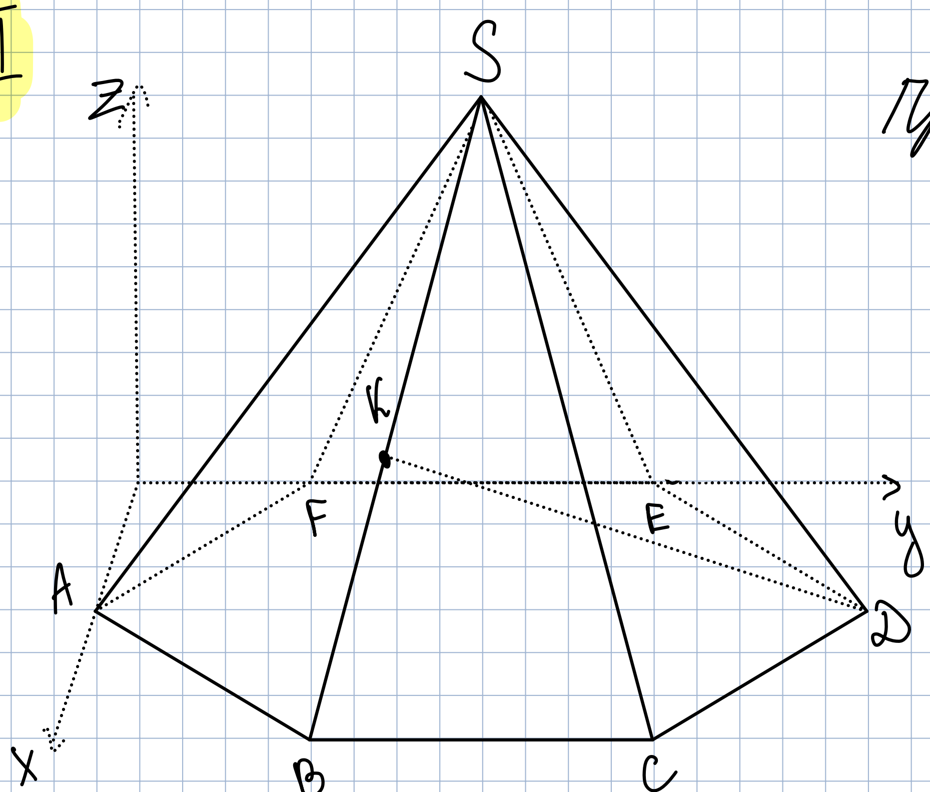
1) Классический способ – перенос одной прямой до пересечения с другой и поиск образ-ся угла

2) Метод координат

$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\bar{p} = \{x_1; y_1; z_1\}$ і $\bar{q} = \{x_2; y_2; z_2\}$ – векторы прямых, угол м/у кот-ми ищется

I



Дано:
Прав. шест. пир.
K – сер. SB
$AB = 5$; $SD = 8$
$\angle(AF \widehat{\ } DK)$ – ?

I способ (классич-ий)

1) перенесём парал-о AF до пересеч с DK

$AF \to CD$

$\angle(\widehat{AF;DK}) = \angle CDK$

Найдем длины сторон в Δ-ке CDK и по теореме кос-ов найдем $\angle CDK$, например.

II способ (мет. коорд)

$A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$

$F(0; 2,5; 0)$

$D\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 10; 0\right)$

$K\left(\frac{15\sqrt{3}}{4}; \frac{15}{4}; \frac{\sqrt{39}}{2}\right)$

$\bar{AF}\left\{0-\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}-0; 0-0\right\}$

$\bar{AF}\left\{-\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right\}$

$\bar{DK}\left\{\frac{5\sqrt{3}}{4}; -\frac{25}{4}; \frac{\sqrt{39}}{2}\right\}$

$$\cos\alpha = \frac{\left|-\frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{25}{4}\right) + 0\cdot\frac{\sqrt{39}}{2}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} + 0}\cdot\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{25}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2}} = \frac{\left|-\frac{75}{8} - \frac{125}{8}\right|}{5\cdot\frac{\sqrt{856}}{4}} =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{856}} = \frac{10}{\sqrt{214}}$$

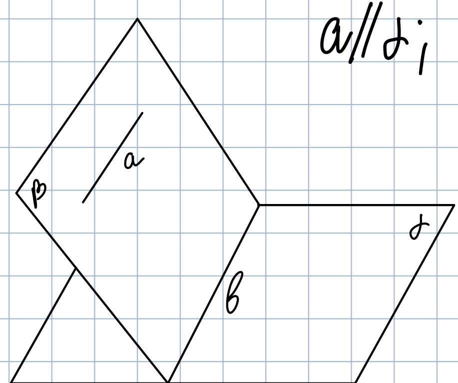
Ответ: $\angle \widehat{AF;DK} = \arccos\frac{10}{\sqrt{214}}$

Как доказать, что прямые параллельны?

1. Найти cos угла м/у ними и показать, что $\cos\alpha = 1$, ведь угол м/у $\parallel$-ми прямыми 0°
2. Доказать, что обе они $\parallel$-ы 3-ей прямой
3. Доказать, что обе прямые $\perp$ какой-то прямой или плоскости
4. По теореме 9

Теорема 9

Если плоскость (β) проходит через данную прямую (a), параллельную другой плоскости (α), и пересекает эту (β) плоскость (α), то линия (в) пересечения плоскостей параллельна данной (a) прямой (в этой теореме слово данное нужно воспринимать как однокоренное слову дано).



$a \parallel \alpha$; Проведём β через a; $\beta \cap \alpha = в$; $\Rightarrow a \parallel в$.

Это редкая, но нужная теорема. Изначально не было известно, что $a \parallel в$, но в конце мы узнаем, что $a \parallel в$

Как доказать, что прямые перп-ы?

1. Найти косинус угла м/у ними и показать, что он равен 0.

2. По теореме 5

3. Классический способ нахождения угла м/у прямыми подразумевает перенос одной прямой до пересечения с другой и поиск образ-ся угла
=> нужно доказать, что получившийся угол 90°, например, по Т. обратной теореме пифагора

Угол между прямой и плоскостью

1. Классический способ нахождения угла между прямой и плоскостью сводится к поиску угла между прямой и её проекцией на эту плоскость.
   Чтобы получить проекцию прямой на пл-сть, нужно опустить высоту из любой точки прямой на пл-сть, и отрезок, начало которого основание опущенной высоты, а конец которого точка пересечения исходной прямой с исходной плоск-ью, является проекцией.
   ! Посмотри стр. 31 – последний восклиц. знак
2. Метод координат

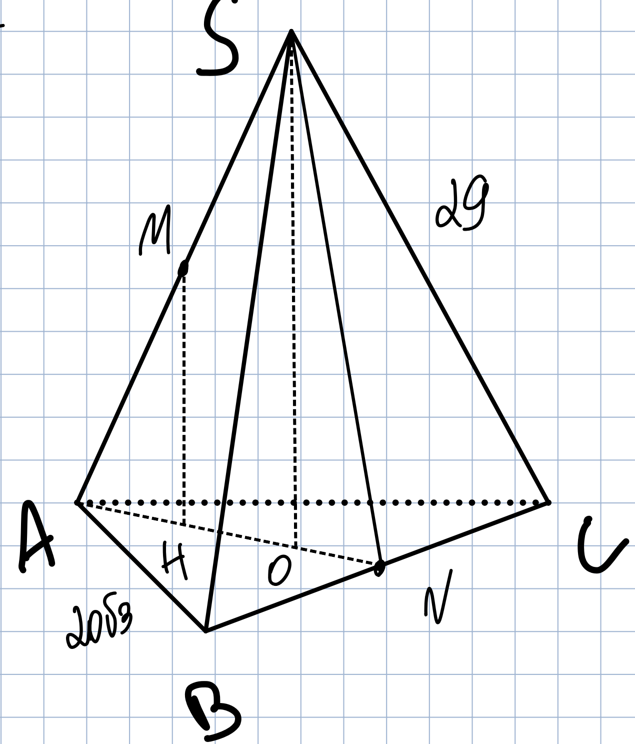
$$\sin\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\bar{p} = \{x_1; y_1; z_1\}$ – вектор I исх-ой прямой, а $\bar{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ – вектор II прямой, перп-ой исходной пл-сти.

По-другому вектор $\bar{n}$ называется вектором нормали.

! На месте $x_2; y_2; z_2$ можно взять a, b, c из ур-ия исходной пл-сти.

I



Дано:
SABC – прав треуг. пир.
$AS = 29$; $AB = 20\sqrt{3}$
M и N – середины
$\angle(\widehat{MN; ABC})$ – ?

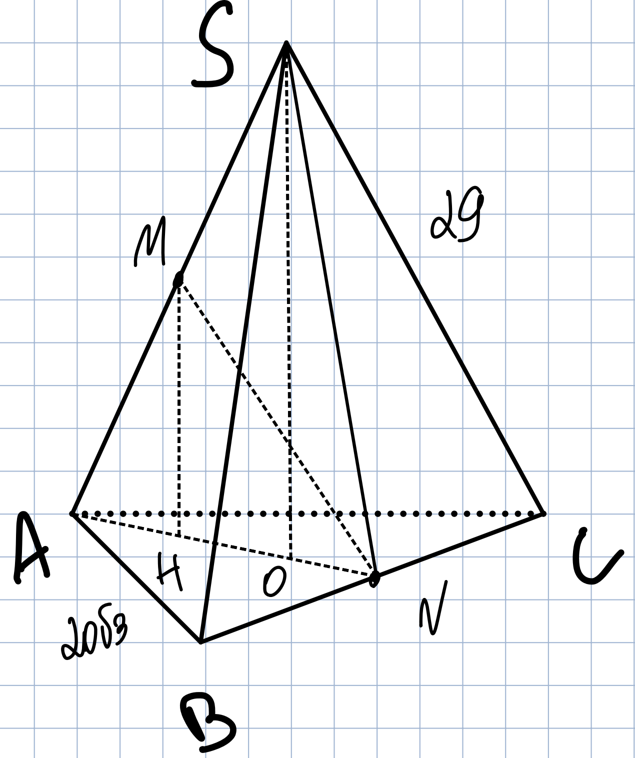
I способ – Классический

1) Мне нужно опустить высоту из M на пл. ABC. Чтобы это сделать, нужно опустить высоту из M на прямую в пл. ABC и доказать, что эта высота и есть высота из M на ABC

Опустим высоту SO пирамиды;
Рассм. пл. ASN
Опустим высоту MH на AO. $MH \parallel SO \Rightarrow MH \perp$ пл. ABC

HN – проекция MN на пл MNH

$\angle(\widehat{MN; ABC}) = \angle MNH$



1) $AN = 30$

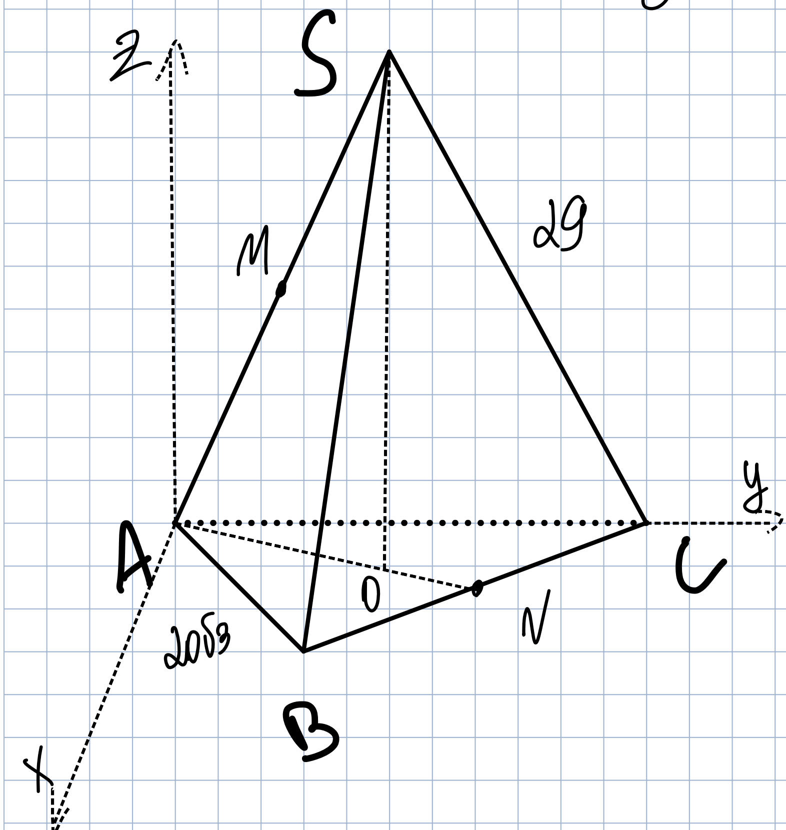
2) $HN = \frac{2}{3} AN = 20$

3) $MH = \frac{1}{2} SO = 10{,}5$

4) $\operatorname{tg} MNH = \frac{10{,}5}{20} = \frac{21}{40}$

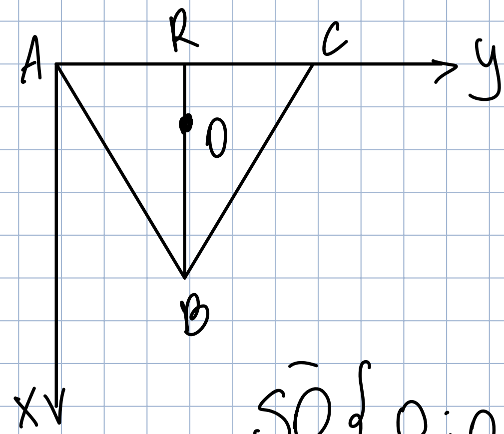
$\angle MNH = \operatorname{arctg}\frac{21}{40}$

II способ — Метод коорд.



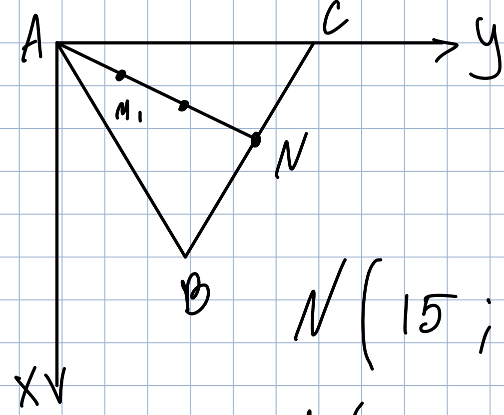
1) $SO \perp ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow$ коорд x, y, z SO будем использ-ть

$S(10;\ 10\sqrt{3};\ 21)$
$O(10;\ 10\sqrt{3};\ 0)$



$\vec{SO}\{0;0;-21\}$

2)



$N(15;\ 15\sqrt{3};\ 0)$

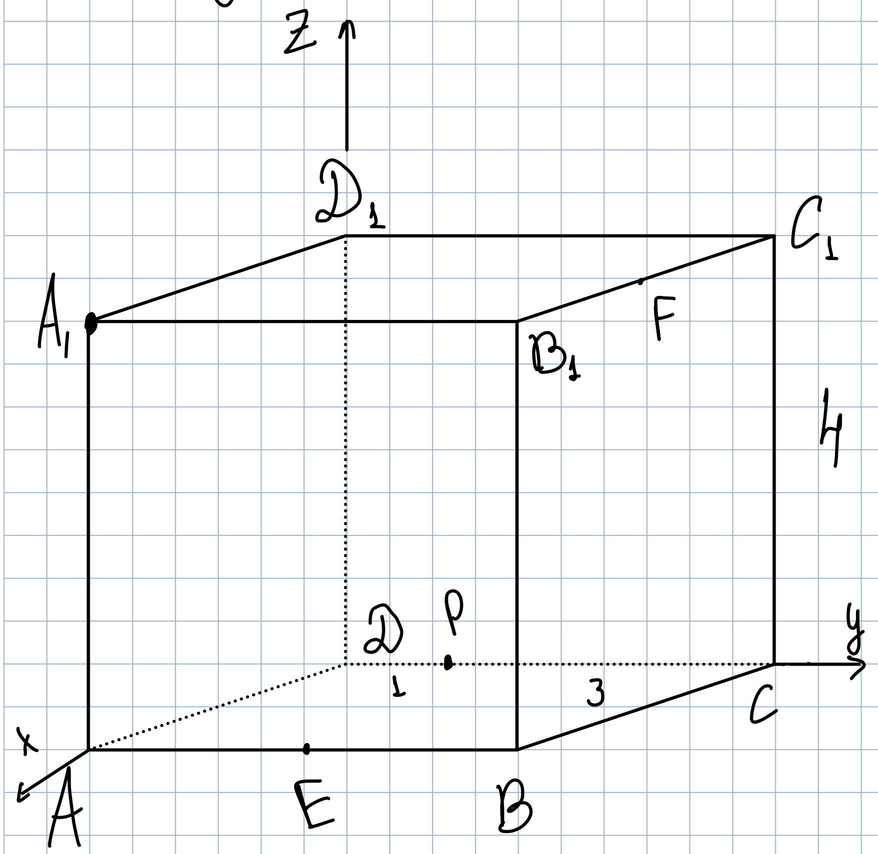
$M(5;\ 5\sqrt{3};\ \frac{21}{2})$

$\overline{MN}\{10;\ 10\sqrt{3};\ -\frac{21}{2}\}$

$$\sin\alpha = \frac{\left|0\cdot 10 + 0\cdot 10\sqrt{3} + 21\cdot\frac{21}{2}\right|}{\sqrt{0^2+0^2+21^2}\cdot\sqrt{10^2+(10\sqrt{3})^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2041}}{2041}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2041}}{2041}$$

I Куб, все рёбра 4. $DP : PC = 1:3$; F - сер. B_1C_1 ; E - сер. AB



$\angle(EPF; AA_1)$ - ?

$$\begin{cases} E(4;2;0) \\ P(0;1;0) \\ F(2;4;4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+2b+d=0 \\ b+d=0 \\ 2a+4b+4c+d=0 \end{cases}$$

$b=-1$

$a=\frac{1}{4}$ $\quad \bar{n}\left\{\frac{1}{4}; -1; \frac{5}{8}\right\}$

$c=\frac{5}{8}$

$A(4;0;0)$

$A_1(4;0;4)$

$AA_1\{0;0;4\}$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{1}{16}+1+\frac{25}{64}}\cdot\sqrt{0+0+16}} = \ldots$$

Ответ: $\angle(EPF; AA_1) = \arcsin \ldots$

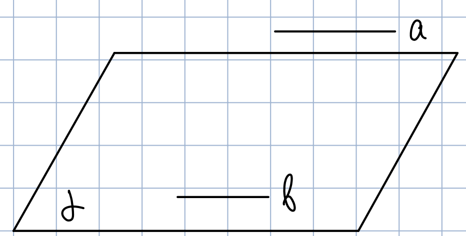
! Если бы в задаче нужно было найти $\angle(EF; BB_1C_1)$, то можно было бы исп-ть $x_1; y_1; z_1$ $\bar{AB}$, т.к. $AB \perp BB_1C$, ведь $\bar{AB}$ - вектор нормали к пл. BB_1C.

Как доказать, что прямая // плоскости

1. По теореме 8 – доказать, что эта прямая и плоскость одновр-о перпенд-ы другой плоск-сти
2. Метод коорд-т – найти sin и показать, что он равен 0.
3. По теореме 10.

Теорема 10

Признак параллельности прямой к плоскости - Если прямая (a), не лежащая в данной плоскости (α), параллельна какой-нибудь прямой (b) из этой плоскости (α), то она (a) будет параллельна этой плоскости (α).



4. Доказать, что прямая лежит в пл-сти // другой плоскости

Как доказать, что прямая ⊥ плоскости

1. При помощи теорем 4 и 7
2. Методом координат – найти sin и показать, что sin равен 1.

Угол между плоскостями

1. Угол между пл-ми можно искать класс. путём – при помощи линейного угла двугр-го угла. Чтобы получить этот линейный угол, необходимо:

   1) Найти линию пересечения двух плоскостей

   2) Провести в каждой пл-сти перп-р к этой прямой, причем оба перп-ра должны упасть в одну точку на линию пересечения

   3) Угол, образованный двумя перп-ми, и есть линейный угол двугр-го угла. Его величину ищут, чаще всего, в каком-нибудь $\triangle$

2. Метод координат

$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\bar{m} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{n} = \{x_2; y_2; z_2\}$ – векторы нормалей к пл-ям.

! На месте $x_1; y_1; z_1$ можно взять a, b, c из ур-ия I исходной пл-сти.

$x_2; y_2; z_2$ – a, b, c II-ой

Как доказать, что две пл-сти ∥ ?

1. по теореме 11

Теорема 11

Признак параллельности двух плоскостей - если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2. Найти cos угла м/у ними и показать, что он 1

Как доказать, что две пл-сти ⊥ ?

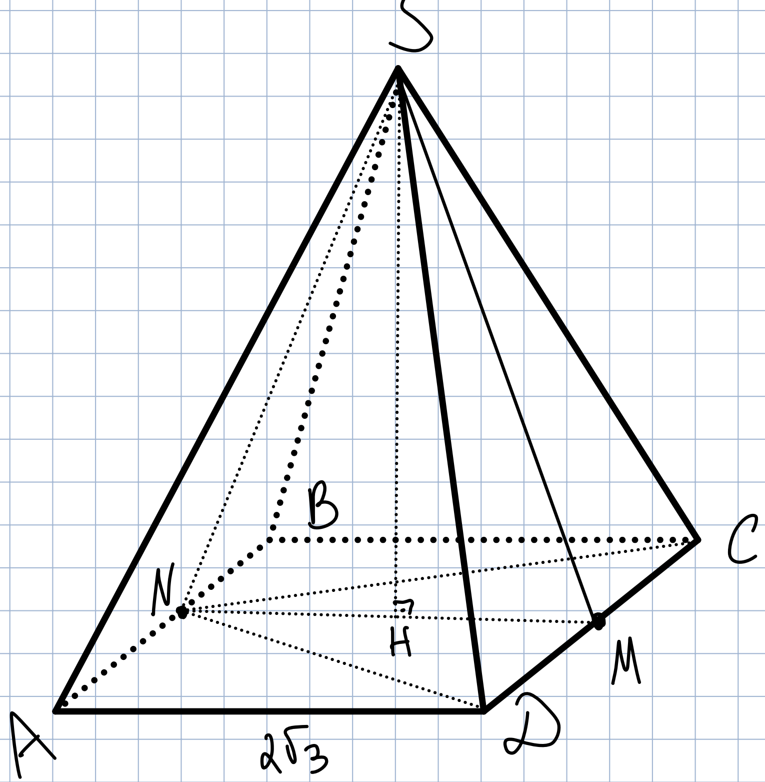
1. Найти cos угла м/у ними и показать, что он 0.
2. По теореме 12

Теорема 12

Признак перпендикулярности двух плоскостей - Плоскость, которая проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, также перпендикулярна этой плоскости. То есть для доказательства перпендикулярности двух плоскостей можно доказать, что одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Сборник решенных задач

I



Дано:

SABCD - прав. чет. пир.

$AB = 2\sqrt{3}$

$SH = 3$

M и N - сер. AB и CD

NT - высота в пир NSCD

а) док, что T - сер. SM

б) $d(\widehat{NT\,SC})$ - ?

Док-во:

1) Докажем, что высота из N на SM = высоте из N на SNM.
Это необх-о сделать, т.к. нельзя знать, где будет основание высоты из N на SNM (т.к. SNM - пл-сть).

Проведём NM и SM; $NM \perp DC$, т.к. $NM \parallel AD$

$SM \perp DC$, т.к. SM - мед-на в р/б $\triangle SDC$.

$\Rightarrow SD \perp$ пл. SNM.

2) Проведём высоту в $\triangle SNM$ из N на SM. Пусть эта высота - h. $h \perp SM$ и $h \perp CD$ $(CD \perp h) \Rightarrow$

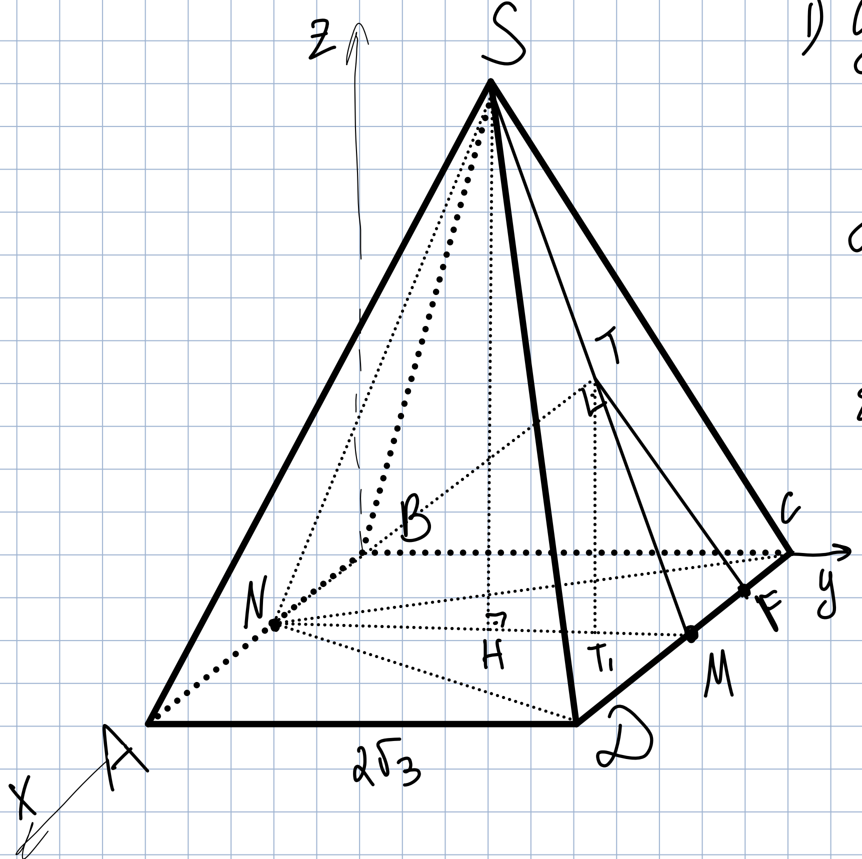
$\Rightarrow h \perp$ пл. SDC $\Rightarrow h - NT$

Коротко говоря, высота из N на SM совпадет с высотой из N на пл. SCD. И чтобы доказать, что высота из N на пл. SCD упадёт на SM, докажем, что высота из N на SM упадёт в середину SM.

3) $SN = \sqrt{SH^2 + NH^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} = SM$

$\Rightarrow \triangle SNM$ – равнобедр. $\Rightarrow$ высота из N на SCD (NT), равная высоте из N на SM упадёт на сер. SM.

б) $d(\widehat{NT; SC})$



1) сделаем ||-ый перенос SC до пересеч. с NT. Проведём TF – ср. линия $\triangle SMC$.
$SC \to TF$

2) $d(\widehat{NT; SC}) = d(\widehat{C; NTF})$

$C(0; 2\sqrt{3}; 0)$

$$\begin{cases} N(\sqrt{3}; 0; 0) \\ T\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3}; 0\right) \end{cases}$$

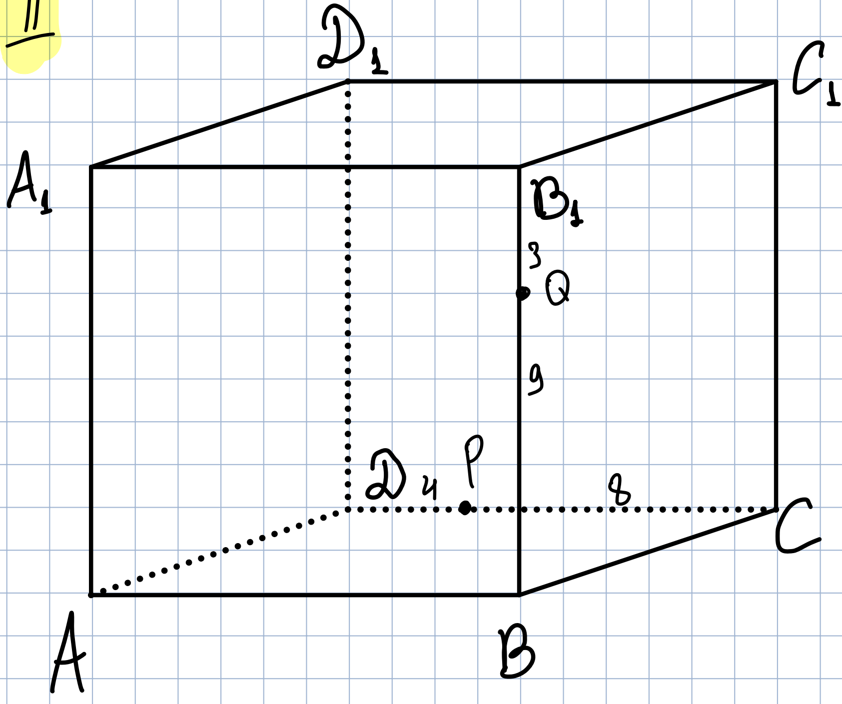
$a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $b = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$; $c = \frac{1}{4}$

$$d(NT; SC) = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{48} + \frac{1}{16}}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

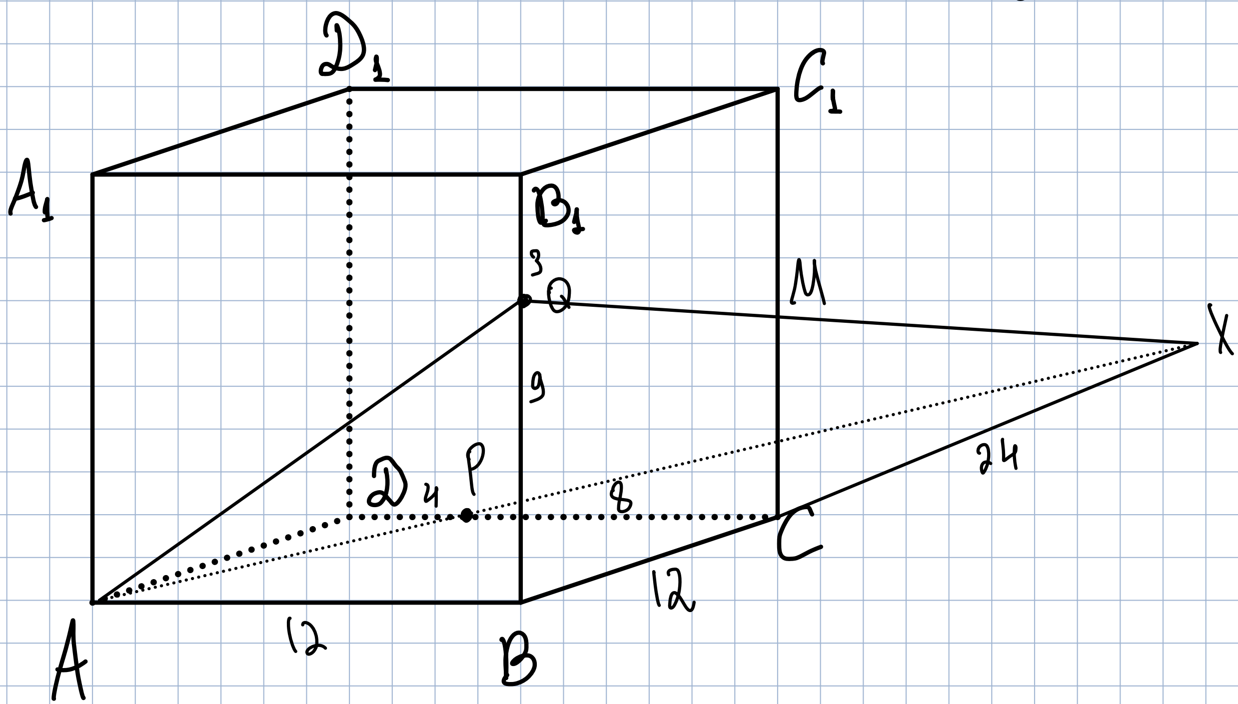
Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$

II

Дано:
куб; ребро 12
пл. $APQ \cap CC_1 = M$
док, что M – сер. CC_1



Нужно построить сечение, прох-щее через APQ



1. $AP \cap BC = X$

$\triangle XPC \sim \triangle XAB = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$XC : XB = 2 : 3$

$\frac{XC}{XC+12} = \frac{2}{3}$, $XC = 24$

2. соед. XQ; $XQ \cap CC_1 = M$

$\triangle XQB \sim \triangle XMC$

$$\frac{XC}{XB} = \frac{MC}{BQ};$$

$$\frac{24}{36} = \frac{MC}{9} \Leftrightarrow MC = 6$$

$\Rightarrow$ MC - середина CC_1

III

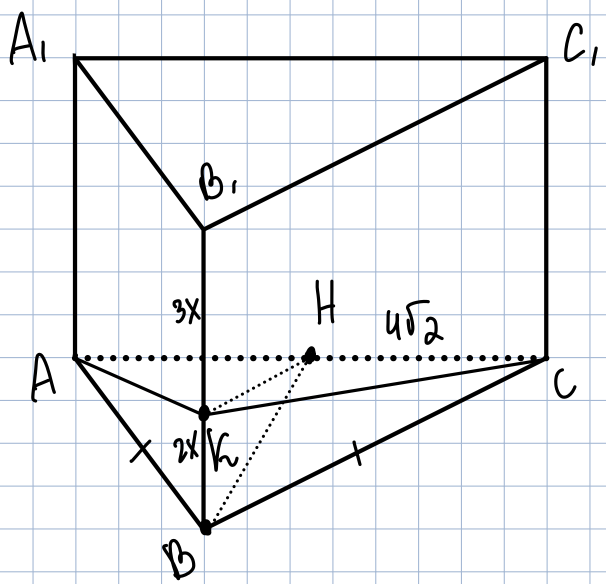
Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ - прям. треуг. пр.

$BK:B_1K = 2:3$; $AB = BC$; $AC = 4\sqrt{2}$

$\angle(ABC; AKC) = 45°$

а) $d(AB; A_1C_1)$ - ? если $KC = 8$



Решение:

1) $\angle(\widehat{ABC; AKC}) = \angle BHK = 45°$, где KH и BH - высоты

$\Rightarrow \angle BKH = 180 - 90 - 45 = 45° \Rightarrow BK = BH = 2x$

2) $KC^2 = BK^2 + BC^2 = 4x^2 + BC^2$

$64 = 4x^2 + BC^2$

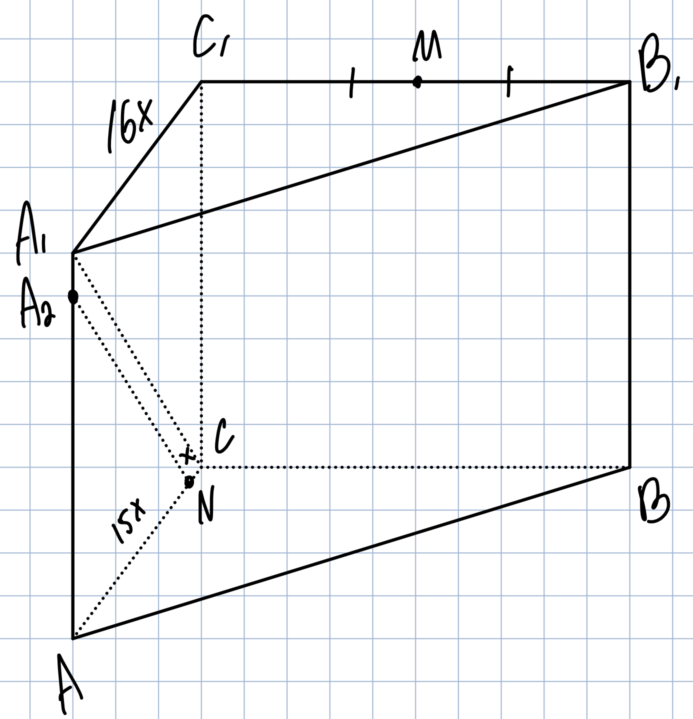
Выразим BC через X.

$BC^2 = 8 + 4x^2$

$64 = 4x^2 + 4x^2 + 8$

$56 = 8x^2$; $x^2 = 7$; $x = \sqrt{7}$; $BB_1 = 5\sqrt{7}$ - это и есть расст. между AB и A_1C_1, т.к. $BB_1 \perp AB$ и $BB_1 \perp A_1C_1$

IV



Дано:

прямая призма; $\angle C = 90^\circ$

M - сер. B_1C_1; $AN : NC = 15:1$;

$AC = 4AA_1$

док, что $MN \perp CA_1$

Пар-о пер-ем $CA_1 \to NA_2$ до пересеч с NM; $\angle A_2NM$ - иск.

1) $\frac{AA_2}{A_2A_1} = \frac{15}{1}$; $\frac{AA_2}{AA_1} = \frac{15}{16}$; $\frac{AA_2}{4x} = \frac{15}{16}$

$AA_2 = \frac{15x}{4}$; $A_1A_2 = \frac{x}{4}$

2) $A_2N = \frac{15\sqrt{17}}{4}x$

3) Пусть $BC = y$

$NM = \sqrt{16x^2 + \frac{y^2}{4} + x^2}$ - в $\triangle NCM$

4) $A_2M = \sqrt{256x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{16}}$ - в $\triangle A_2A_1M$

5) Применим теор. обр. теор. Пиф. в $\triangle A_2NM$

$256x^2 + \cancel{\frac{y^2}{4}} + \frac{x^2}{16} = \frac{225 \cdot 17}{16}x^2 + 16x^2 + \cancel{\frac{y^2}{4}} + x^2 \quad | \cdot 16$

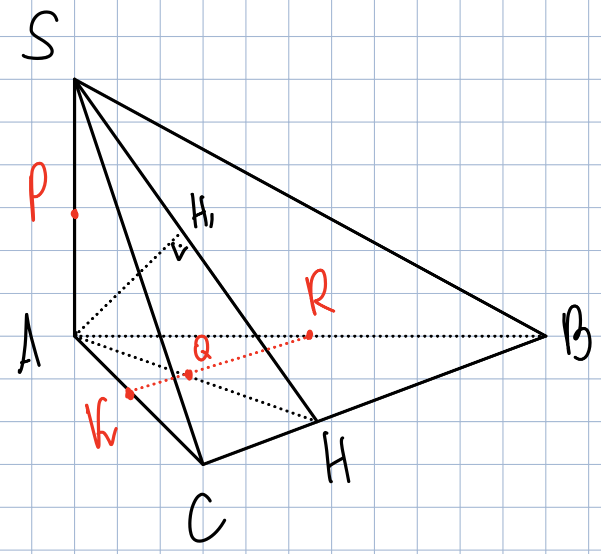
$256 \cdot 16x^2 + x^2 = 225 \cdot 17 \cdot x^2 + 17x^2 \cdot 16$

$4097x^2 = 3825x^2 + 272x^2$

$4097x^2 = 4097x^2$

$\Rightarrow \triangle A_2NM$ - прямоуг $\Rightarrow \angle A_2NM = 90^\circ = \angle(\widehat{MN\,CA_1})$

V



Дано:

$SA \perp$ пл. ACB

$SABCD$ – пир-да

док, что высота из A на пл. SCB делится пополам пл-ью PKR, где P, K, R – середины

1) Проведём высоту из S на BC в $\triangle SBC$ (SH)

$\left.\begin{array}{l} SH \perp BC \\ AS \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp$ пл. $ASH \Rightarrow BC \perp AH$

2) Докажем, что $h(A; SCB) = h(\widehat{A; SH})$

Проведём $AH_1 \perp SH$

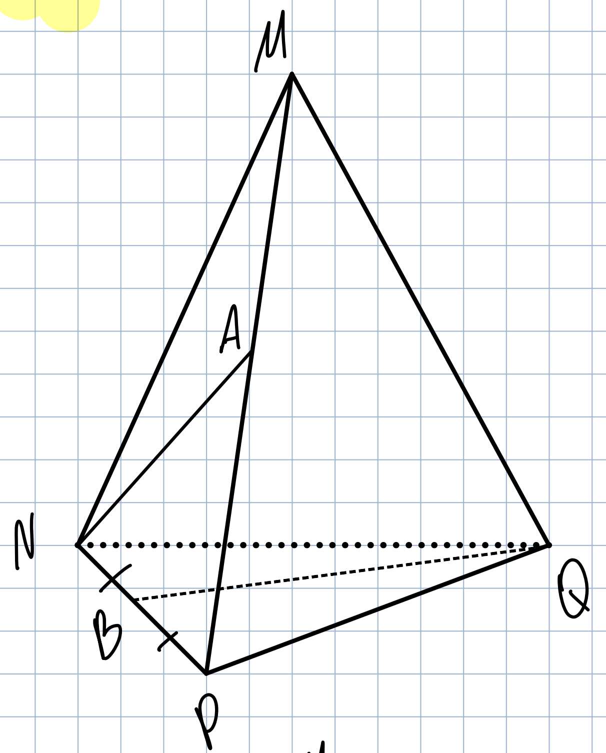
$\left.\begin{array}{l} AH_1 \perp BC \\ AH_1 \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow AH_1 \perp$ пл. SCB

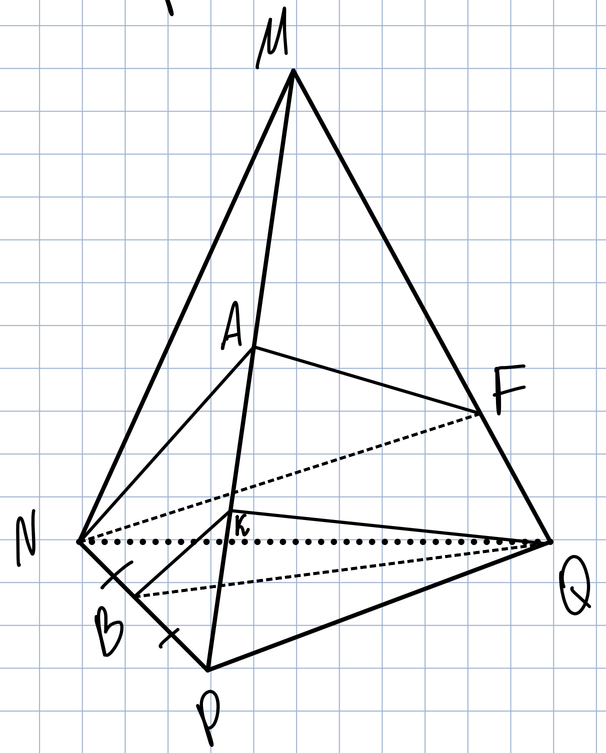
3) Нужно доказать, что пл. $PKR \cap AH_1$ в середине

4) соед. KR; $KR \cap AH = Q$ ($PQ \in$ пл. PKR), где Q – сер. AH

5) рассм. пл. SAH; PQ – ср. линия $\triangle ASH \Rightarrow PQ$ (пл PQR) $\cap AH_1$ в середине.

VI





Дано:

MNPQ - прав тетр; NA и QB - бис-ы.
Через NA и QB проведены парал-ые пл-сти. Найти отнош-ие суммы объемов отсекаемых от MNPQ тетраэдров к объему MNPQ.

Решение:

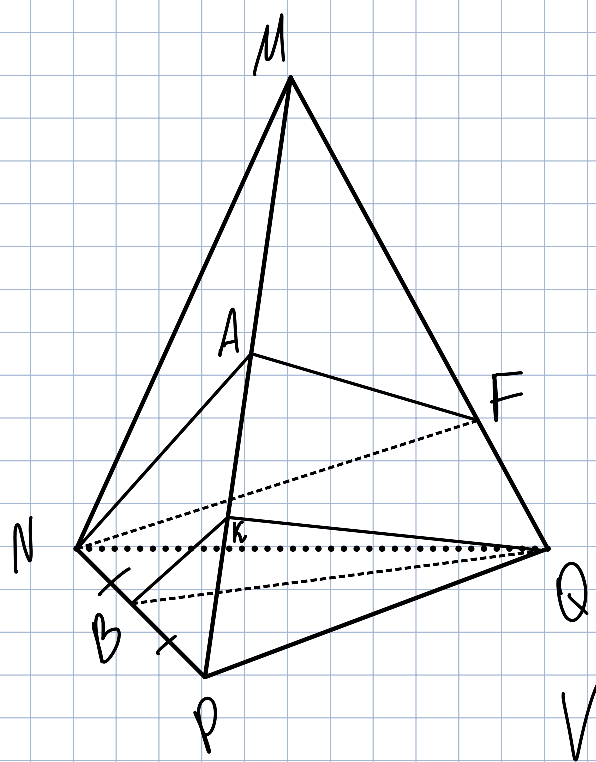
1) α - I-ая пл, прох через NA
β - II-ая, прох через BQ

2) $\beta \cap NMP = B$
$\Rightarrow \beta \cap NMP = a \ (B \in a)$
Пусть K - сер. AP
$BK = a$.
пл. $BKQ = \beta$

3) $\alpha \cap MPQ = A$
$\Rightarrow \alpha \cap MPQ = b \ (A \in b)$
Пусть $MF : FQ = MA : AK$ (чтобы AF был $\parallel KQ$
пл. $MAF = \alpha$.

! В этой задаче нельзя было начать построение пл. α.

$$\frac{V_{KBPQ} + V_{AMNF}}{V_{MNPQ}} - ?$$



1) $V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{NPQ} \cdot h_1$

$V_{KBPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{NPQ} \cdot \frac{1}{4} h_1$

$= \frac{1}{8} \cdot V_{MNPQ}$

2) $V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{NMQ} \cdot h_2$

$V_{ANMF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h_2 \cdot S_{NMF};$

S_{NMF} - ?

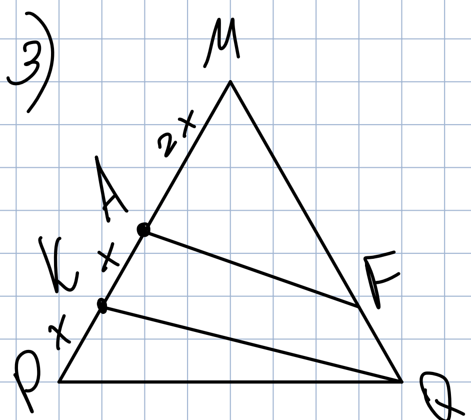
$\triangle MAF \sim \triangle MKQ$

$k = \frac{MA}{MK} = \frac{MF}{MQ}$

$\frac{2x}{3x} = \frac{MF}{4x}$

$MF = \frac{8x^2}{3x} = \frac{8x}{3}$

$MF : MQ = \frac{8x}{3} : 4x = \frac{2}{3}$

3) 

$S_{\triangle NMQ} = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot MQ \cdot \sin 60^\circ$

$S_{\triangle NMF} = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot \frac{2}{3} MQ \cdot \sin 60$

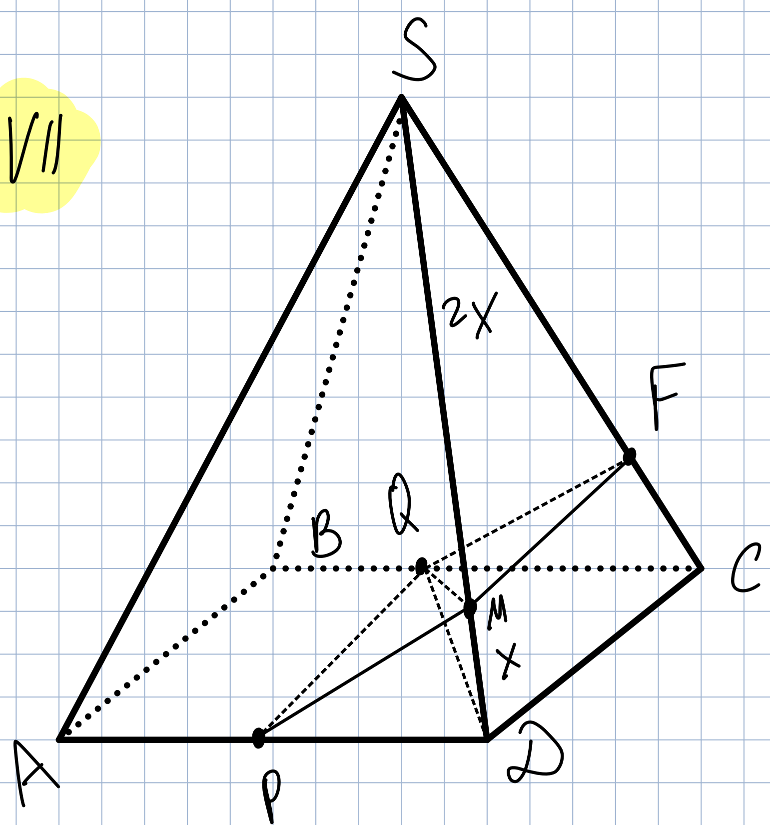
$\Rightarrow S_{\triangle NMF} = \frac{2}{3} S_{\triangle NMQ}$

$\Rightarrow V_{ANMF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h_2 \cdot S_{NMF} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \frac{2}{3} S_{NMQ} = \frac{1}{3} \cdot V_{MNPQ}$

$$\frac{V_{KBPQ} + V_{AMNF}}{V_{MNPQ}} = \frac{\frac{1}{8} V_{MNPQ} + \frac{1}{3} V_{MNPQ}}{V_{MNPQ}} = \frac{11}{24}$$

VII



Дано:
SABCD - прав. 4-ая пир.
$SM : SD = 2 : 3$; P - сер. AD;
Q - сер. BC; $SF : FC = 2 : 1$

$\frac{V_{CDPQFM}}{V_{SABPQMF}}$ - ?

Пусть $SO = h$
Пусть $S_{ABCD} = a$
$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} ah$

1. $V_{PQFCDM} = V_{MPQD} + V_{QMFCD}$ (1) (2), т.е. мы поделили многогранник, объем которого не могли найти, плоскостью!

(1) $V_{MPQD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{ah}{36} = \frac{1}{12} V_{SABCD}$

(2) $V_{QMFCD} = ?$

$$V_{BSCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD}$$

$$V_{QSCD} = \frac{1}{4} V_{SABCD}$$

$$\frac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SDC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{DMFC}}{S_{SDC}} = \frac{5}{9}$$

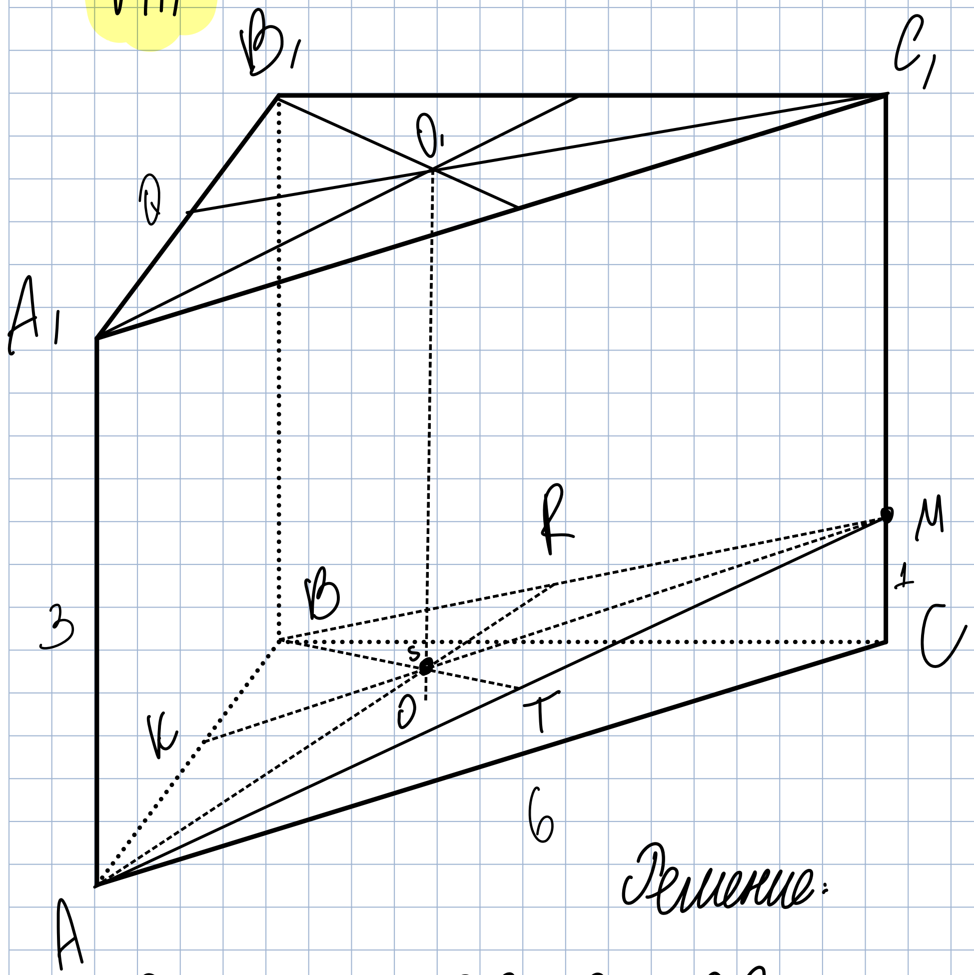
$$\Rightarrow \frac{V_{QDMFC}}{V_{QSCD}} = \frac{5}{9}$$

$$V_{QDMFC} = \frac{5}{9} V_{QSCD} = \frac{5}{36} V_{SABCD}$$

$$\Rightarrow V_{QMFCDP} = \frac{1}{12} V_{SABCD} + \frac{5}{36} V_{SABCD} = \frac{2}{9} V_{SABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{CDPQFM}}{V_{SABPQMF}} = \frac{2}{7}.$$

VIII



Дано:

Прав 3-ая призма;

$AB=6$; $AA_1=3$

O и O_1 – ц. опис-ных окр $\triangle$-ов; $CM=1$; S – т. пересеч. медиан ABM;

док, что S лежит на OO_1

Решение:

Докажем, что $SO_1+SO=OO_1$

1) $SO = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3}$ $(\triangle SKO \sim \triangle MKC)$

2) $OO_1=3$

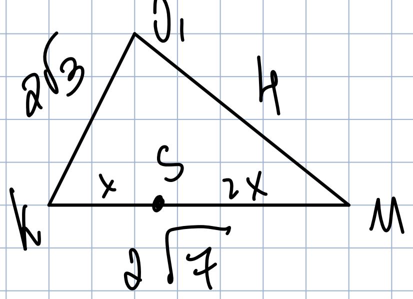
3) O_1S – ?

Найдем O_1S в $\triangle KO_1M$

$KO_1 = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$O_1M = \sqrt{12+4} = 4$

$KM = \sqrt{37-9} = 2\sqrt{7}$



$$16 = 12 + 28 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \cos\alpha$$

$$8\sqrt{21}\cos\alpha = 24$$

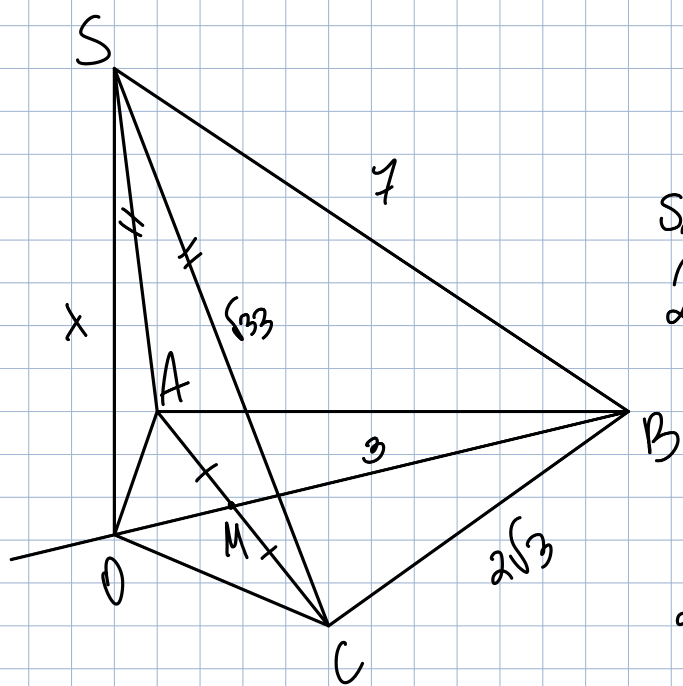
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$$

$$SO_1^2 = 12 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}}$$

$$SO_1 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow SO_1 + SO = OO_1$$

IX



Дано:

пир $SABC$; ABC – р/с Δ; $AB = 2\sqrt{3}$

$SA = SC = \sqrt{33}$; $SB = 7$; SO – высота

Док, что O лежит вне ΔABC.

1) SO – выс. из S на пл. ABC.

2) $\Delta SAO = \Delta SOC$ (по кат и гип)

$\Rightarrow OA = OC$

3) $\Delta OAB = \Delta OBC$

$\Rightarrow \angle ABO = \angle CBO$

4) $OB \cap AC = M$

BM - бисс $\Rightarrow$ мед.

$\Rightarrow AM = MC$ и O, M, B лежат

на одной прямой

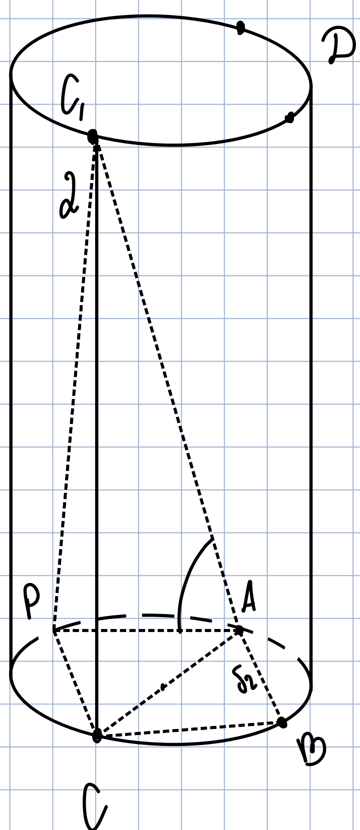
5) Нужно доказать, что $BO > BM$

$OC = \sqrt{33 - x^2} = OA$, где $SO = x$ и $x^2 < 33$

$OB = \sqrt{49 - x^2} \geq 4$, т.к. $x^2 < 33$

$\Rightarrow BO > BM$

X



Дано:

В цилиндре обр-ая $\perp$ осн-ию

A, B, C – лежат в нижней окр-и

C_1 – в верхней, причем CC_1 - обр-ая.

AC – диаметр; $\angle ACB = 30°$; $AB = \sqrt{2}$

$CC_1 = 2$

док, что $\angle(AC_1 \widehat{\,,\,} BC) = 45°$

Пусть $CP \parallel AB$; тогда $AP \parallel BC$

$\angle(AC_1 \widehat{\,,\,} BC) = \angle PAC_1$,

Найдём длины сторон в $\triangle C_1AP$ и покажем, что прямоуг. $\triangle C_1AP$ еще и р/б.

Работу выполнил:

Одикадзе Г.Г.