22. Графики функций

I Общая теория каждой функции

II Работа с графиками и модулем

III Примеры

I Общая теория каждой функции

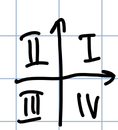
1. Линейная ф-ия (ПРЯМАЯ)
2. Квадр-ая ф-ия (ПАРАБОЛА)
3. Кубическая ф-ия
4. Дробная ф-ия (ГИПЕРБОЛА)
5. Ф-ия с корнем

1. Линейная ф-ия

1. Общий вид $y = kx + b$, где k и b какие-то числа. Например, $y = -2x + 3$.

2. а) Коэф-ент k отвечает угол наклона прямой. По-другому можно сказать, что k отвечает за то, где будут находиться концы прямой

Если $k > 0$, то концы прямой в I и III ч.



Если $k < 0$, то концы прямой во II и IV ч.

б) Коэф-нт b (как и любой другой свободный коэф.) отвечает за координату "y" точки пересечения ф-ии с осью "y"

3. График функции - прямая $\Rightarrow$ для построения линейной ф-ии достаточно 2 точек

Пример:

Построить

1) $y = -4x + 5$

x	0	3
y	5	-7

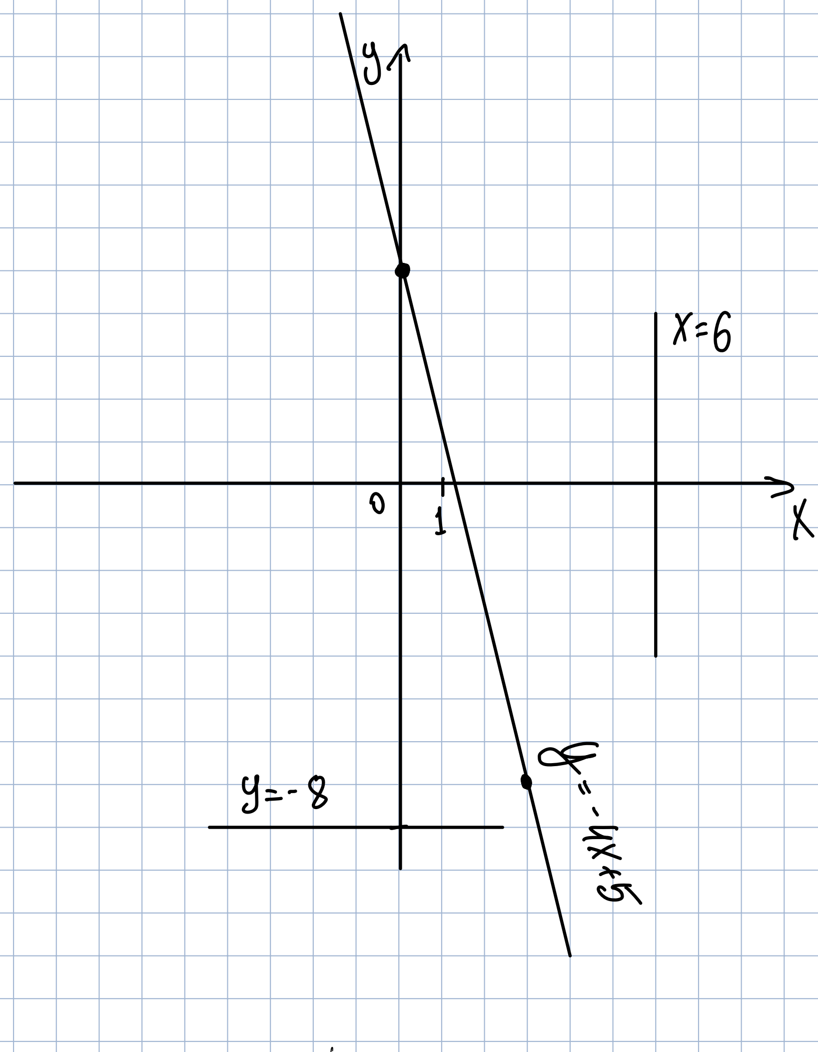
2) $y = -8$

3) $x = 6$

! Берешь любые числа на место x и находишь соответств-ие им знач. y.

! Лучше не брать стоящие рядом x, т.е. брать $x = 1$ и 2 - плохо

$x = 1$ и 5 - хорошо.



! У данной ф-ии $k = -4$, и по рисунку мы видим, что начало и конец прямой находятся в II и IV четв

! $b = 5$, и по рисунку мы видим, что прямая пересекла Oy в координате 5.

2. Квадратичная функция

1. Общий вид $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c какие-то числа (но $a \neq 0$, иначе если $a = 0$, то ф-ия станет лин)

2. а) Коэф. a отвечает за то, куда будут направлены ветви параболы.

   Если $a > 0$, то $\cup$
   Если $a < 0$, то $\cap$

   б) Коэф. c - свободный коэфф-нт

3. График функции парабола, и для её построения достаточно 5 точек.

   I-ое значение x нужно найти по ф-ле $\frac{-b}{2a}$.
   Далее от найденного икса нужно сделать симметричные шаги (± 1; ± 2; $\pm 0,5$; $\pm 1,5$). Шаги нужно брать такие, чтобы в таблице получались целые иксы.

Примеры

Построить

1) $y = x^2 - 4x + 3$

2) $y = -2x^2 + 2x + 3$

3) $y = 2x^2 - 5$

4) $y = x^2$

5) $y = 2(x-1)^2 - 3$

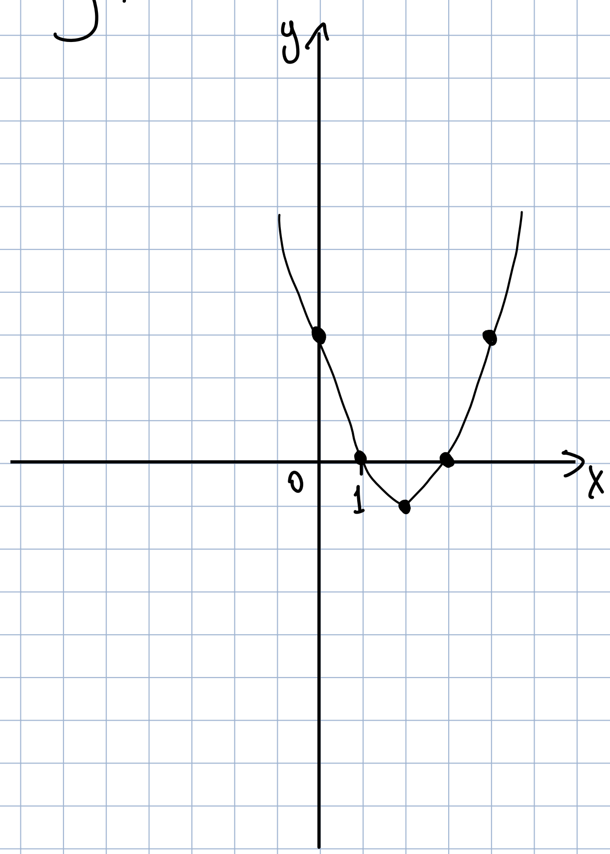
1) $y = x^2 - 4x + 3$

$x = \frac{4}{2} = 2$

x	2	1	3	0	4
y	-1	0	0	3	3

от $x=2$ сделаны шаги $\pm 1 \Rightarrow x = 1$ и 3

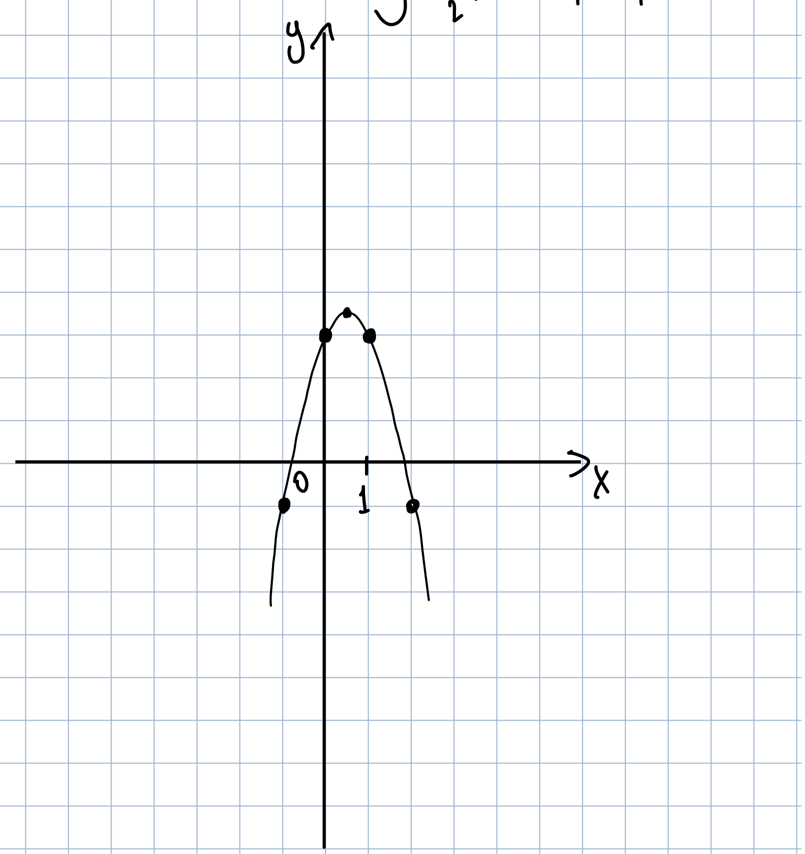
± 2, $x = 0$ и 4



2) $y = -2x^2 + 2x + 3$

$x = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{2}$	0	1	-1	2
y	$\frac{7}{2}$	3	3	-1	-1



3) $y = 2x^2 - 5$;

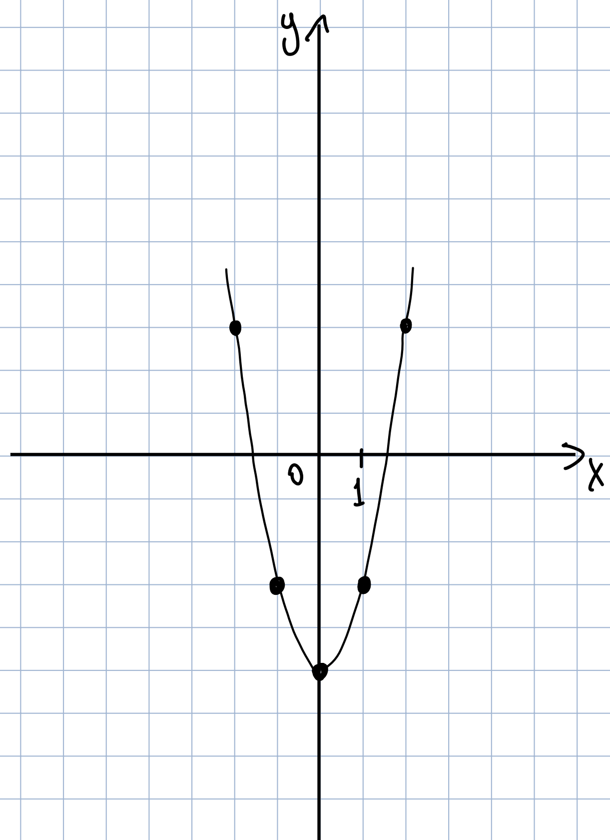
$x = \frac{0}{4} = 0$

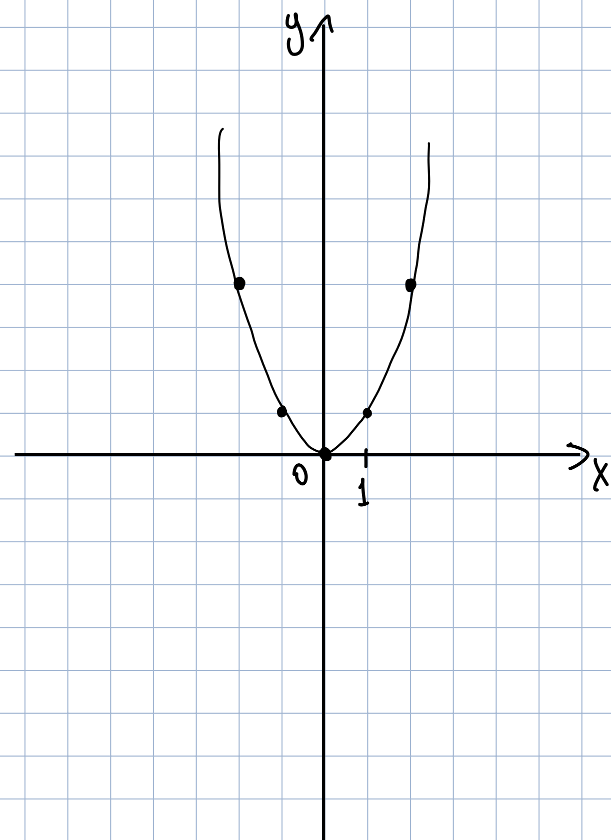
x	0	1	-1	2	-2
y	-5	-3	-3	3	3

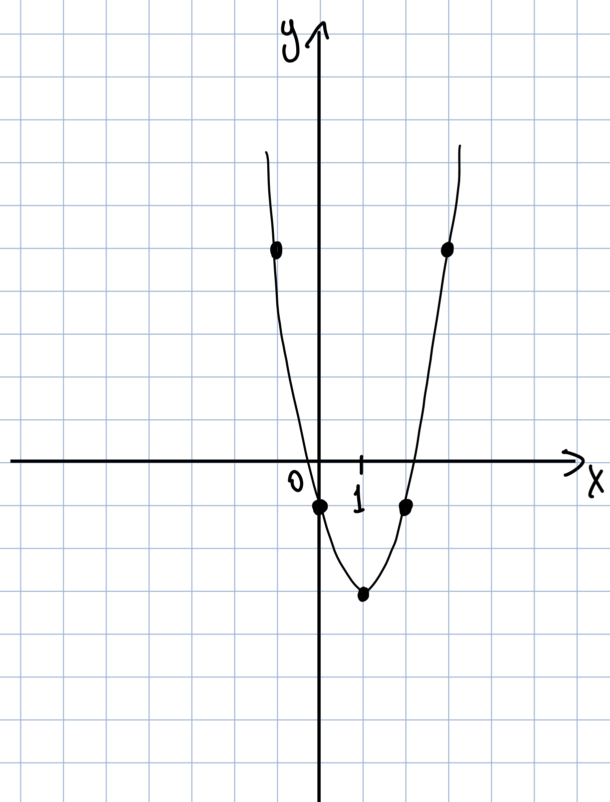
4) $y = x^2$

$x = \frac{0}{2} = 0$

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4







5) $y = 2(x-1)^2 - 3$ – эту ф-цию можно построить поэтапно – взять шаблон, сдвинуть его вправо и вниз. Но я считаю, лучше просто раскрыть скобки.

$y = 2(x-1)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 2x^2 - 4x - 1$

$x = \frac{4}{4} = 1$

x	1	0	2	-1	3
y	-3	-1	-1	5	5

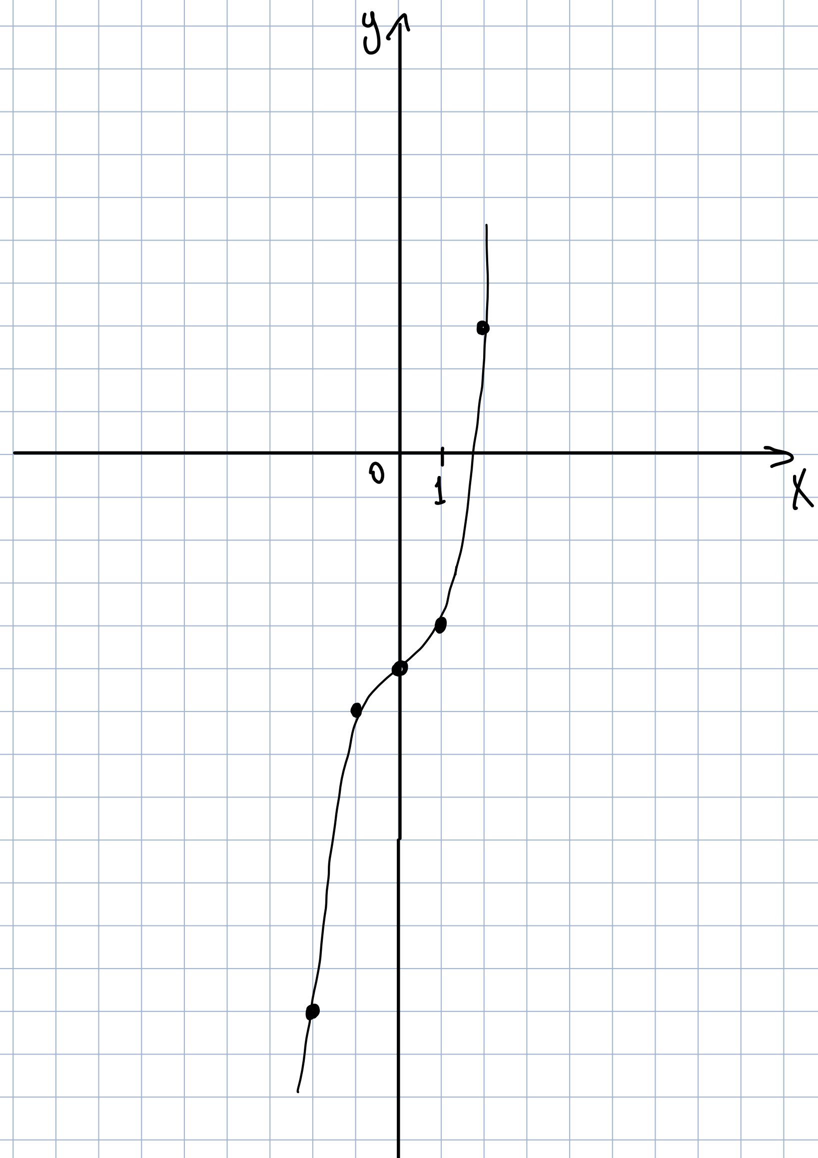
3. Кубическая ф-ия

Кубическая парабола почти не встречается на экзамене.
Построение этой ф-ии очень похоже на построение п.2.

Построить:

$y = x^3 - 5$

x	0	1	-1	2	-2
y	-5	-4	-6	3	-13



4. Дробная ф-ия (Гипербола)

1. Общий вид: $y = \frac{k}{x} + b$, где k и b какие-то числа.

! Учитывая, что в знаменателе есть x, то x не может быть равен нулю ($x \neq 0$). По-другому $x \neq 0$ можно понять следующим образом – у ф-ии не должно быть точки с координатой 0 по x $\Rightarrow$ ф-ия не может пересечь ось y, ведь любая точка на оси y имеет координату 0 по иксу.

2. Коэф-т k отвечает за то, в каких четвертях будет находиться функция.

Если $k > 0$, то в I и III четв
$k < 0$, то во II и IV четв

3. $y = b$ – ассимптота ф-ии. Ассимптота – прямая, к которой стремится ф-ия, но не пересекает.

4. Для построения гиперболы достаточно 6 точек, среди которых 3 положит – 2 целые и 1 дроб.
3 отриц – 2 целые и 1 дроб.

Примеры

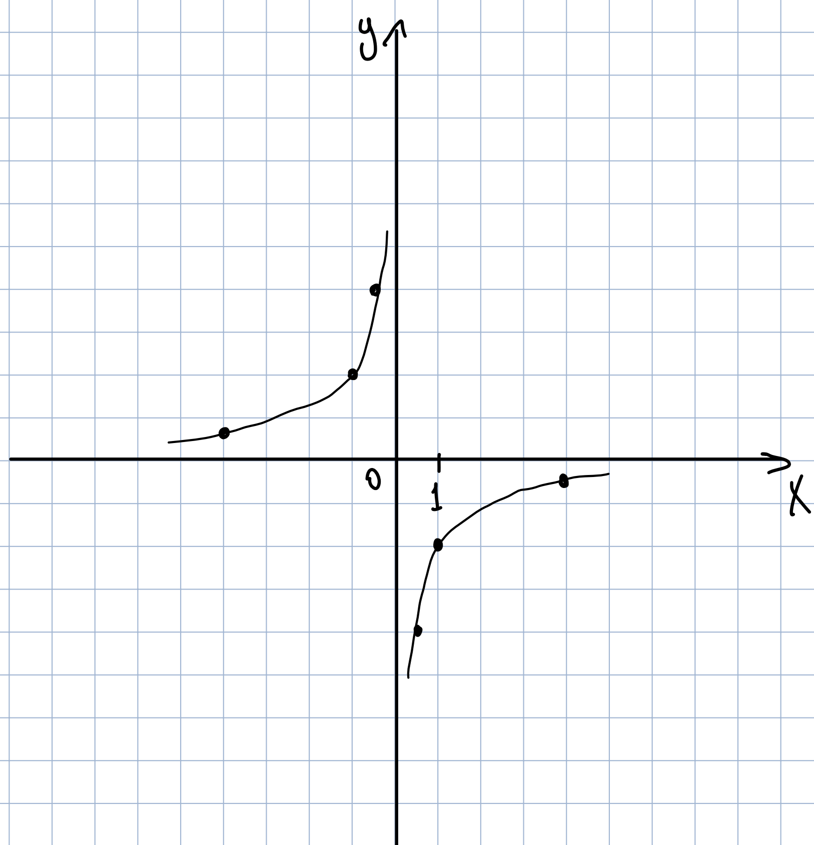
Построить

1) $y = -\frac{2}{x}$

2) $y = \frac{4}{x} - 2$

1) $y = -\frac{2}{x}$ (в данном случае $в = 0 \Rightarrow y = 0$ - ассим-та)

x	$\frac{1}{2}$	1	4	$-\frac{1}{2}$	-1	-4
y	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	4	2	$\frac{1}{2}$

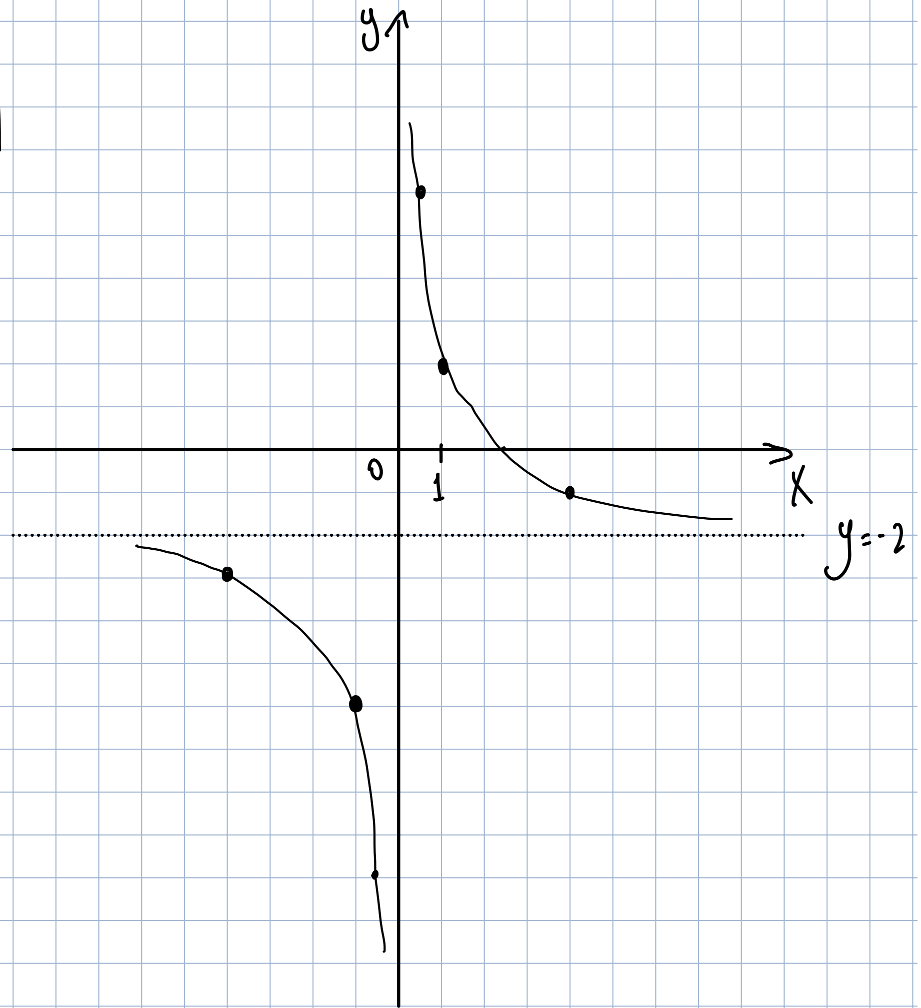


г) $y = \frac{4}{x} - 2$;

x	1	4	$\frac{1}{2}$	-1	-4	$\frac{1}{2}$
y	2	-1	6	-6	-3	-10

$y = -2$ – асс-та

Ф-ия не пересекает $y = -2$, т.е. ф-ия не имеет точки с координатой по $y = -2$, т.к. y равен -2, если первое слагаемое ф-ии равно 0, а это невозм-о.



5. Ф-ия с корнем

Любое задание, где есть х или многочлен с Х-ом, нужно начинать с ОДЗ.

Есть 2 вида ф-ий с корнем

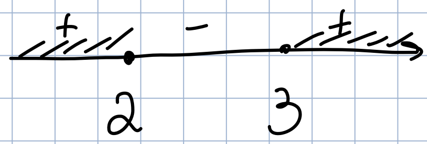
I: функция, у которой после преобразований не осталось корня

II: ‖—‖ остался корень. — этого нет в ОГЭ.

Примеры

1) $y = \left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2$

ОДЗ: $x^2-5x+6 \geq 0$

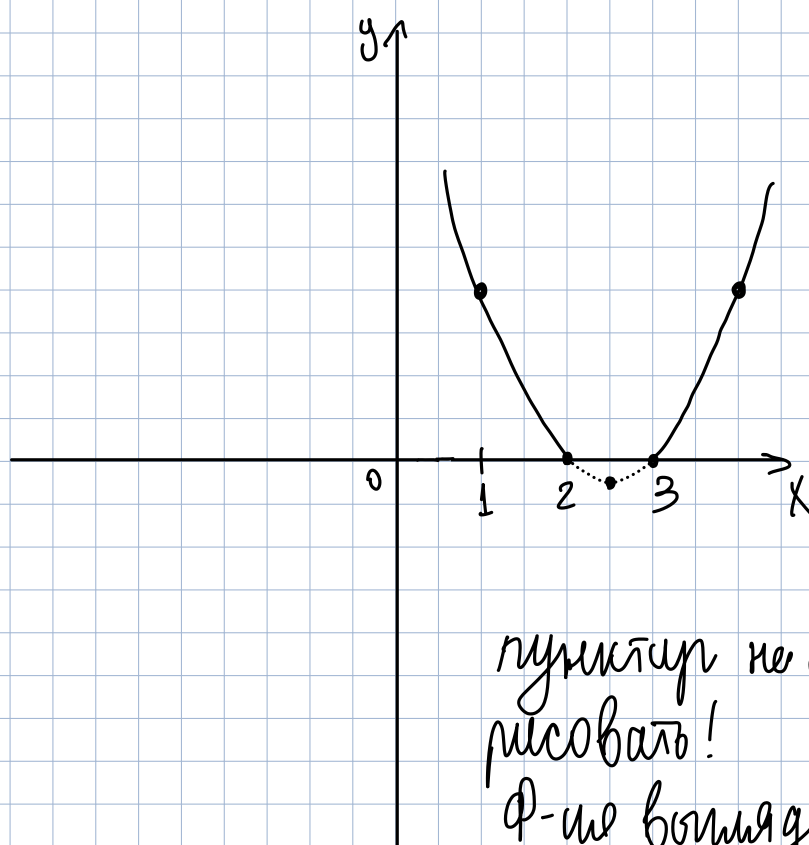


, т.е. ф-ия существует до 2-ух и после 3-ех по иксу.

$y = \left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2 = x^2-5x+6$

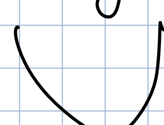
$x = \frac{5}{2} = 2{,}5$

x	2,5	2	3	1	4
y	$-\frac{1}{4}$	0	0	2	2



пунктир не нужно рисовать!

Ф-ия выглядит так



II Работа с графиками и модулем

В данном разделе изучим все необходимые техники работы с ф-цией для ОГЭ.

① Как узнать, проходит ли функция через заданную точку? 2 способа

I Нужно подставить значения x и y в ф-цию, и если получится верное равенство, то проходит.

Например, проходит ли $y = x^2 - 3$ через $A(4; 13)$?

$13 = 4^2 - 3$

$13 = 13$

$\Rightarrow$ да, проходит (!если бы не получилось верное равенство, то не проходила бы)

II Нарисовать ф-цию и посмотреть, проходит или нет.

② Как найти (координаты точки) точку пересечения двух функций?

I Приравнять правые части ф-ций для нахождения x. Потом найти y, подставляя в любую из ф-ций.

Например, найдите коорд-ы т. пересечения

$y = 4x$ и $y = x^2 - x + 6$.

$4x = x^2 - x + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$y_1 = 4 \cdot 3 = 12 \qquad y_2 = 4 \cdot 2 = 8$

Эти ф-ии имеют 2 т. пересечения

$A(3;12)$; $B(2;8)$

II : построить обе ф-ии в одной системе координат и найти т. пересечения.

! Способ I дает точные коорд-ты т. пересечения, а II-ой примерные.

③ Работа с ф-ей, заданной следующим образом:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x, & x > -1 \\ -\dfrac{5}{x}, & x \leq -1. \end{cases}$$

1. В данном задании ОГЭ знак системы стоит не совсем корректно. Здесь больше подошел бы знак сов-сти, означающий, что y "превращ-ся" в I-ую функцию $x^2 - 4x$ на отрезке $x > -1$ и во

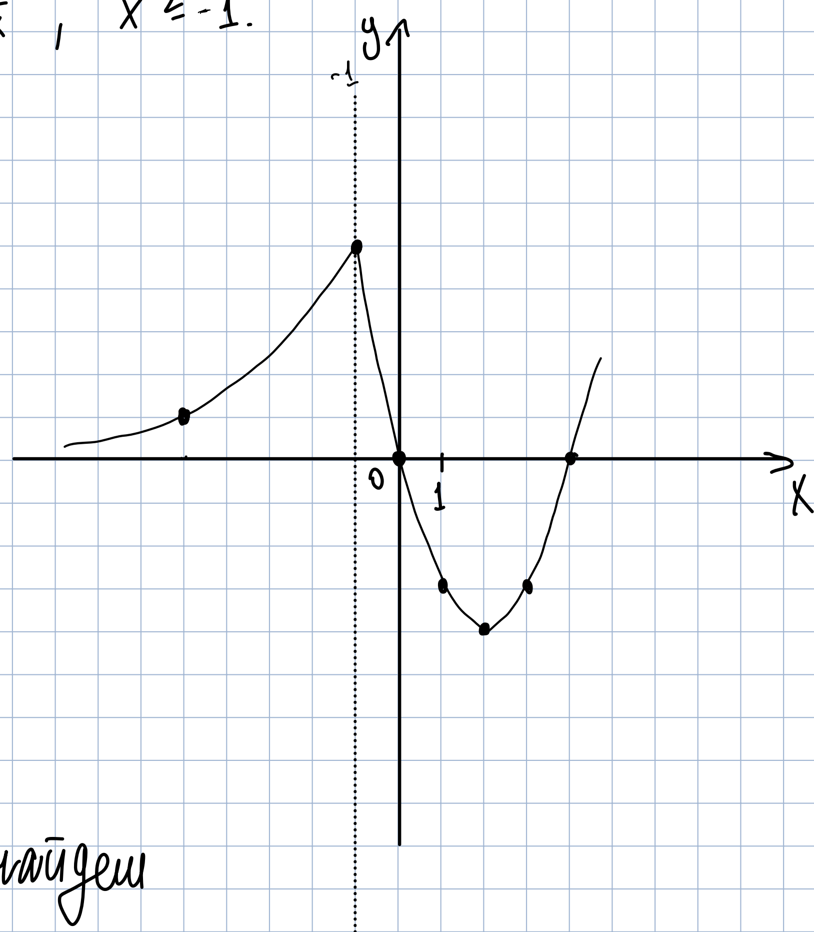
II-ую функцию $-\frac{5}{x}$ на отрезке $x \le -1$

2. Построение такой ф-ии, состоящей из 2-ух графиков, очень простое. Нужно построить (пун-ом) $y = x^2 - 4x$ и $y = -\frac{5}{x}$ и потом оставить каждую ф-ию на своем интервале

! Если первой график, например, сущ-ует до 2-ух, а второй после 2-ух по иску, то в 99% случаев коорд по x точки пересечения равна 2. (y можно легко найти, подставив в любую ф-ию).

(парабола сущ-ет после -1, а гипербола до -1.)

Построить $y = \begin{cases} x^2 - 4x, & x > -1 \\ -\frac{5}{x}, & x \le -1. \end{cases}$



1) $y = x^2 - 4x$

$x = \frac{4}{2} = 2$

x	2	1	3	0	4
y	-4	-3	-3	0	0

2) $y = -\frac{5}{x}$

x	$\frac{1}{2}$	1	5	$-\frac{1}{2}$	-1	-5
y	-10	-5	-1	10	5	1

Для точности построения найдем т. пересечения 2-ух ф-ий

$x^2 - 4x = -\frac{5}{x}$

$\frac{x^3 - 4x^2 + 0 \cdot x + 5}{x} = 0$

$x^3 - 4x^2 + 0 \cdot x + 5 = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 0\cdot x + 5 & x+1 \\ \underline{x^3 + x^2} \qquad\qquad & \overline{x^2 - 5x + 5} \\ -5x^2 + 0\cdot x \quad & \\ \underline{-5x^2 - 5x} \quad & \\ 5x + 5 & \end{array}$$

$(x+1)(x^2 - 5x + 5) = 0$

$x_1 = -1$ – то, что нас и интересует. $y = \frac{-5}{-1} = 5$

$x_2 = \dots$

$x_3 = \dots$

! $|x| \le 1$ означает, что $-1 \le x \le 1$

$|x| > 1$ означает, что $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

4) Работа с модулем в графиках

$|x-3|$ – матем-ая кон-ия, с которой нужно работать по особому алгоритму.

Модуль написан для того, чтобы окончательное значение $x-3$ было всегда положит-ым:

Например, I) $x = 0$; $|0-3| = |-3| = -(-3) = 3$

II) $x = 5$; $|5-3| = |2| = 2$

Можно сделать вывод, что если x такой, что

подмодульное выражение отриц-о (как в I случае) то модуль должен раскрыться, выкинув перед собой −, чтобы, как уже было сказано, оконч. знач. было положит-ым.
А если x такой, что подмодульное выражение положительно (как во II случае), то модуль должен раскрыться, выкинув перед собой +.

Узнаем, при каких x подмодульное выражение положительно: $x-3>0 \longrightarrow x>3$
отриц-о : $x-3 \leq 0 \longrightarrow x \leq 3$

$$\Rightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{если } x>3 \\ -(x-3)=3-x, & \text{если } x \leq 3 \end{cases}$$

Пример: Построить $y=x^2-|4x+3|$

1) $4x+3 \geq 0$ − узнаём, при каких x подм-ое выр. +
$x \geq -\frac{3}{4}$ − при этих x подмод. выр. положит.

2) $4x+3<0$
$x<-\frac{3}{4}$ − при этих x подм. выр. отриц.

$$\Rightarrow |4x+3| = \begin{cases} 4x+3, & \text{если } x \geq -\frac{3}{4} \\ -(4x+3), & \text{если } x<-\frac{3}{4} \end{cases}$$

Если $x \geq -\frac{3}{4}$, то $y=x^2-(4x+3)=x^2-4x-3$

Если $x < -\frac{3}{4}$, то $y = x^2 + (4x+3) = x^2+4x+3$

Одним словом, все ур-ия с модулем сводятся к решению примера образца пункта 3

$$y = \begin{cases} x^2-4x-3, & \text{если } x \geq -\frac{3}{4} \\ x^2+4x+3, & \text{если } x < -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

5 Работа с $y = m$ ($y = c$)

$y = m$ – ф-ия, график которой – прямая $\parallel Ox$

Если нужно узнать, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с какой-то фун-ей 1,2,3 точки, то часто нужно просто знать коорд. по y некоторых точек функций.

Например: найти m, при которых

$$y_1 = \begin{cases} x^2-4x, & x > -1 \\ -\frac{5}{x}, & x \leq -1. \end{cases}$$ и $y_2 = m$ имеют

а) 1 общ. точку

б) 2

в) 3.

Построим y_1

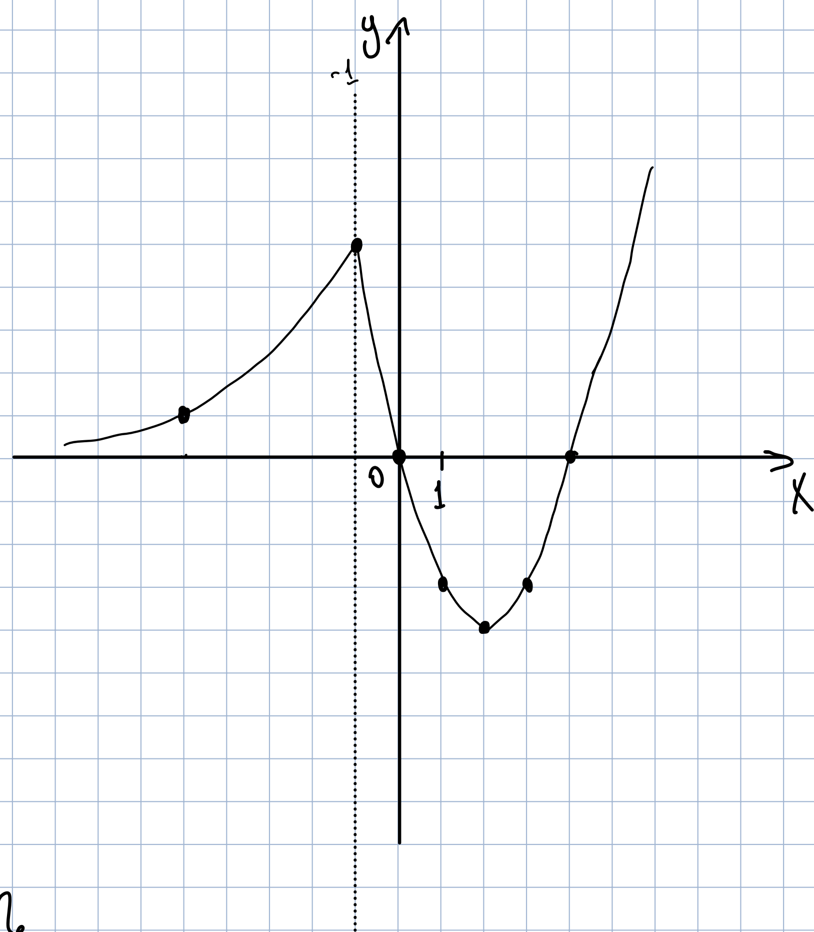
$y = x^2 - 4x$

$x = \frac{4}{2} = 2$

x	2	1	3	0	4
y	-4	-3	-3	0	0

$y = -\frac{5}{x}$

x	$\frac{1}{2}$	1	5	$-\frac{1}{2}$	-1	-5
y	-10	-5	-1	10	5	1



а) $m \in (5; +\infty) \cup \{-4\}$

б) $m \in (-4; 0] \cup \{5\}$

в) $m \in (0; 5)$

⑥ Работа с ф-ей, у которой в зн-ле был x или многочлен с x-ом, но после сокращения числ-ля и знам-ля знаменатель ушёл.

$$y = \frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}$$

Ф-ция определена при:

1) $x^2+5x+4 \neq 0$

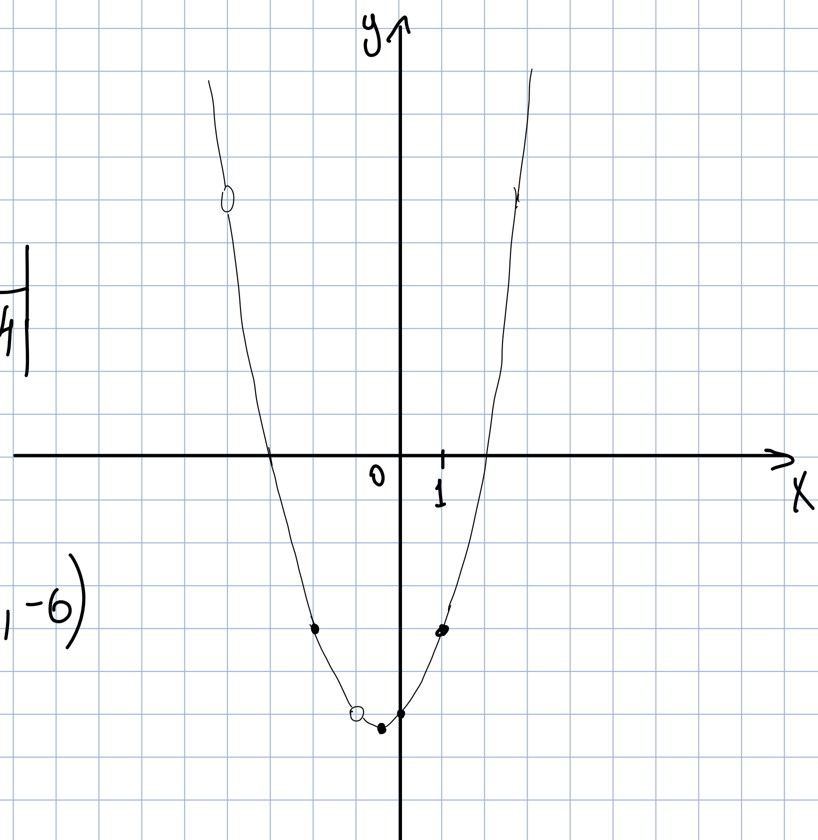
$x \neq -1;\ x \neq -4$

$$y=\frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}=\frac{(x+3)\cancel{(x+4)}\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+4)}}=x^2+x-6$$

$y=x^2+x-6$

$x=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

x	$-\frac{1}{2}$	-1	0	-2	1
y	$-6\frac{1}{4}$	-6	-6	-4	-4



I-ая выкол-ая т. $(-1;-6)$

II $(-4;6)$

Доп. задание

1. При каких m $y=m$ имеет с графиком 1 общ. т? $m=-6{,}25$; $m=-6$; $m=6$ (понадобились коорд по y этих особых точек)

2. При каких k $y=kx$ будет иметь с

графиком 1 общую точку?

Чтобы $y=kx$ имел с гр-ом 1 общую точку, нужно, чтобы

I $y=kx$ был кас-ой к параболе (т.е. имел с ней ровно 1 общую точку)

II $y=kx$ проходил через "дыры" параболы

I: $kx = x^2+x-6$

$x^2+x(1-k)-6=0$

$D=(1-k)^2+24$, теперь прир-ем D к 0, чтобы найти k, при которых $D=0$

$(1-k)^2+24=0$

нет реш $\Rightarrow$ $y=kx$ не м.б. быть касат-ой.

Это было видно и по рисунку

II 1) $y=kx$ проходит через $(-1;-6)$

$-6=k\cdot(-1)$

$k=6$

2) $y=kx$ прох. через $(-4;6)$

$6=k\cdot(-4)$

$k=-1{,}5.$

Работу выполнил:

Одикадзе Г.Г.