ЕГЭ Задание 12. Уравнения

I. Уравнения 9 класса

II. Тригонометрические ур-ия

III. Показательные и Логарифмические ур-ия

IV. Иррац-ые ур-ия

V. Ур-ия с модулем

VI Ур-ия смешанного типа

Данный файл предназначен для получения полной базы, необходимой для начала работы с заданием 12 ЕГЭ.

Уравнения 9 класса

1) Степенные (линейные, квадр-ые и кубические уравнения, а также степенные уравнения, усложненные тем, что есть знаменатели с числами)

2) Дробные

3) Сводимые / сведенные к произв-ию, равному 0.

4) Уравнения, решаемые с заменой

! Чтобы ответить на вопрос, при каком значении X, $3x-4$ равен 11, нужно записать ур-ие $3x-4=11$ и решить его.

1. Степенные ур-ия

Линейные ур-ия

Чтобы решить линейное ур-ие, нужно перекинуть влево одночлены с иксом, а числа вправо. Потом нужно привести подобные, а в конце поделить левую и правую части ур-ия на коэф-т перед иксом

$$7X-5=17X+2X-6$$
$$7X-17X-2X=-6+5$$
$$-12x=-1 \quad |:(-12)$$
$$X=\frac{1}{12}$$

Квадратные ур-ия

Полные квадратные ур-ия решаются при помощи дискр-нта, а неполные переводом многочлена в умножение

! Если $D>0$, то у квад. ур. 2 корня; $D=0$ 1 кор, $D<0$ — нет корней

1) $2x^2-5x+2=0$

$D=b^2-4ac=25-4\cdot2\cdot2=9$

$x_1=\frac{5+3}{4}=2$

$x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

2) $25x^2-16=0$

$(5x-4)(5x+4)=0$

$5x-4=0$ $\quad$ $5x+4=0$

$x=0{,}8$ $\quad$ $x=-0{,}8$

3) $4x^2-8x=0$

$4x(x-2)=0$

$4x=0 \mid :4$ $\quad$ $x-2=0$

$x=0$ $\quad$ $x=2$

Уравнения 3-ей степени и выше

Все ур-ия этой группы решаются одинаково – многочлен, равный 0, раскладывается на множители делением.

! Все ур-ия этой подгруппы также считаются ур-ми 3-го вида – свод/свед к ур-ию, равному 0.

$3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 = 0$

Разложим на множители многочлен $3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$

1) Среди делителей нацело свободного коэф-та (6) найдём тот, что при подстановке обратит многочлен в 0.

$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 6;\ -6$

+

2) Делим многочлен на x - число $(x-3)$ в столбик. При делении подбираем такие одночлены в частном, чтобы урав-лись одночлены наивысшей степени.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 & x-3 \\
\cline{2-2}
-\underline{3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad\quad & 3x^2 - 5x + 2 \\
-5x^2 + 17x \qquad\ \ & \\
-\underline{-5x^2 + 15x} \qquad\ \ & \\
2x - 6 & \\
-\underline{2x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 = (x-3)(3x^2 - 5x + 2)$

$(x-3)(3x^2 - 5x + 2) = 0$

$x - 3 = 0$ или $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$x = 3$ $\qquad x_1 = 1;\ x_2 = \frac{2}{3}$

Ответ: $x = 3;\ 1;\ \frac{2}{3}$

! При делении многочлен $x^3 - 5x + 6$ лучше записать как $x^3 \pm 0 \cdot x^2 - 5x + 6$.

Степенные ур-ия, усложненные тем, что есть числа в знаменателе

Приводим к общ. зн-лю, потом говорим: дробь равна нулю тогда, когда числитель равен нулю

I способ

$$\frac{x-2}{3} - \frac{3x^2+4}{2} = 6 - \frac{5-x}{5}$$

$$\frac{x-2}{3} - \frac{3x^2+4}{2} - 6 + \frac{5-x}{5} = 0$$

$$\frac{(x-2)\cdot 10}{3\cdot 10}-\frac{(3x^2+4)\cdot 15}{2\cdot 15}-\frac{6\cdot 30}{1\cdot 30}+\frac{(5-x)\cdot 6}{5\cdot 6}=0$$

$$\frac{10(x-2)}{30}-\frac{15(3x^2+4)}{30}-\frac{180}{30}+\frac{6(5-x)}{30}=0$$

$$\frac{10x-20}{30}-\frac{45x^2+60}{30}-\frac{180}{30}+\frac{30-6x}{30}=0$$

$$\frac{(10x-20)-(45x^2+60)-180+(30-6x)}{30}=0$$

$$\frac{10x-20-45x^2-60-180+30-6x}{30}=0$$

$$10x-20-45x^2-60-180+30-6x=0$$

II способ

$$\frac{x-2}{3}-\frac{3x^2+4}{2}=6-\frac{5-x}{5}\quad\Big|\cdot 30$$

$$10(x-2)-15(3x^2+4)=180-6(5-x)$$

! II ой способ лучше! Им и нужно польз-ться

2. Дробные уравнения

Дробным ур-ем называется ур-ие, где в знам-ле есть x или многочлен с иксом.

Т.к. в зн-ле есть x или многочлен с x, а знаменатель это делитель, то при опред-ых иксах делитель (зн-ль) может стать нулём => произойдёт деление на 0.

Поэтому, чтобы не происходило деление на 0, нужно найти x, при которых это произойдет и запретить их (исключить из области допустимых значений)

Для поиска и запрета используется конструкция ≠ (= для поиска и дачи ответа)

Запрет чисел, при которых зн-ль (делитель) будет равен 0, нужно делать в ОДЗ.

Существует 2 способа решения дробных ур-ий

1. ОДЗ; домножение на общий зн-ль

2. ОДЗ + Сведение ур-ия к следующей логике:

Если $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то можно сказать, что результат деления будет равен нулю только тогда, когда в числителе 0 (когда 0 на что-то делили, напр. $0:3=0$; $0:(-4)=0$). => мы должны стремиться к тому, чтобы была только 1 дробь и эта дробь была равна 0 (не двум, трем и т.д.)

Пример: $\dfrac{3x-9}{x-1} + \dfrac{x+6}{x+1} = 3$

ОДЗ:

1) $x-1 \neq 0$ (нужно найти, при каком иксе $x-1$ будет равен нулю и запретить найденное число)

$x \neq 1$

2) $x+1 \neq 0$

$x \neq -1$

Уравнение определено при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ — это значит, что мы при решении ур-ия работаем с иксами из этого интервала, а $x = \pm 1$ (числа ± 1) мы не рассматриваем вовсе.

! Всё, что написано тонкой ручкой - дополнения и комментарии - их не нужно писать. Это касается только этого параграфа.

! Ур-ия с зачеркнутым знаком ($\neq$) решаются так же, как и ($=$); а ответы одинаковых ур-ий, но с разными знаками ($=$ и $\neq$) будут противоп-ми.

I способ:

$$\frac{3x-9}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 3 \quad \Big| \cdot (x-1)(x+1), \quad (x-1)(x+1) \neq 0$$

! При домножении ур-ия на x или многочлен с иксом есть риск домножить ур-ие на 0. Например, если ты домножаешь на $x-3$, а корнем ур-ия является $x=3$, то домножение на $x-3$ равносильно умножению на 0 в этом ур-ии. Та же логика работает и при делении.

! Касаемо нашего ур-ия: домножение на $(x-1)(x+1)$ равносильно домножению на 0 при $x=\pm 1$. Но мы в ОДЗ написали, что ур-ие опр. при $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$ и иксы, равные ± 1 мы не рассматриваем вовсе $\Rightarrow$ умножение на $(x-1)(x+1)$ в этом ур-ии не равносильно умножению на 0 т.е. $(x+1)(x-1) \neq 0$

$$(3x-9)(x+1)+(x+6)(x-1)=3(x-1)(x+1)$$

$$x^2-x-12=0$$

$$x_1=4;\ x_2=-3$$

они не запрещены

Ответ: $x=4; -3$.

II способ:

$$\frac{3x-9}{x-1}+\frac{x+6}{x+1}-\frac{3}{1}=0$$ (сперва всё нужно перекинуть влево)

$$\frac{(3x-9)(x+1)+(x+6)(x-1)-3\overbrace{(x-1)(x+1)}^{(x^2-1)}}{(x-1)(x+1)}=0$$ (потом всё приводим к общ. зн-лю)

$$\frac{3x^2+3x-9x-9+x^2-x+6x-6-3x^2+3}{(x-1)(x+1)}=0$$ (приводим подобные)

$$\frac{x^2-x-12}{(x-1)(x+1)}=0$$

Деление равно нулю тогда, когда делимое (числитель) равно нулю. Чтобы найти числа, при которых числитель нуль, запишем и решим ур-ие:

$x^2-x-12=0$

$x_1=4;\ x_2=-3$

Они не запрещены

Ответ: $x=4;-3.$

Ещё пример:

$$\frac{7x-5}{x^2-6x}+\frac{8}{2x^2-72}=5$$

ОДЗ:

1) $x^2-6x\neq0$

$x(x-6)\neq0$

$x\neq0;\ x\neq6$

2) $2x^2-72\neq0\ |:2$

$x^2-36\neq0$

$x\neq\pm6$

Ур. опр. при $x\in(-\infty;-6)\cup(-6;0)\cup(0;6)\cup(6;+\infty)$

$$\frac{7x-5}{x^2-6x}+\frac{8}{2x^2-72}=5$$

Далее мне нужно домножить на общ. зн-ль, поэтому и найдём общ. зн-ль разложением зн-ей на множ-ли.

$$\frac{7x-5}{x(x-6)}+\frac{8}{2(x-6)(x+6)}=5 \quad \Big| \cdot 2x(x-6)(x+6),$$

$$2x(x-6)(x+6)\neq 0$$

Дальше легко

3. Уравнения, сводимые или уже сведенные к произведению, равному нулю.

Ур-ия из этой группы сводятся (если еще не сведены) к логике - если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$. Одним словом, многочлен, равный нулю, переводится в умножение, равное нулю.

Способы перевода в умножение многочленов

1. Вынесение общего множителя
2. Группировка
3. Ф. С. У. (формулы сокр-го умножения)
4. Разложение на множители квадр-го трехчлена:

   ax^2+bx+c может разложиться на $a(x-x_1)(x-x_2)$, где корни x_1 и x_2 нужно найти, приравняв ax^2+bx+c к 0.
   Например, переведем $3x^2-5x+2$ в умножение.
   1) $3x^2-5x+2=0$; 2) $x_1=1$; $x_2=\frac{2}{3}$ 3) $3x^2-5x+2=3(x-1)(x-\frac{2}{3})$.

5. Разложение на множ-ли многочлена 3 степени и выше:

   Деление в столбик - этот способ уже разбирался выше в док-те в разделе степенных ур-ий

   $3x^3-14x^2+17x-6=(x-3)(3x^2-5x+2)$

! Способы перевода в умножение нужно знать как отдельную тему, т.к. она исп-ся еще и при работе с букв-ми дробями, например.

Примеры 0) $(x-3)(x-2)=0 \to \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x-2=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2. \end{array}\right.$

1. $25x^2-16=0$

$(5x-4)(5x+4)=0$

$\left[\begin{array}{l} 5x-4=0 \\ 5x+4=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{4}{5} \\ x=-\frac{4}{5} \end{array}\right.$

2) $4x^2-8x=0$

$4x(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} 4x=0 \quad |:4 \\ x-2=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

3) $x^4=(4x-5)^2$

$x^4-(4x-5)^2=0$

$(x^2-(4x-5))(x^2+(4x-5))=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2-4x+5=0 \text{ – нет реш} \\ x^2+4x-5=0 \text{ – } x_1=1; x_2=-5. \end{array}\right.$

3.1) $x^6=(3x-2)^3 \downarrow 3$

$x^2=3x-2$

4. $(x-3)(x-4)(x-5)=(x-2)(x-4)(x-5)$

$(x-3)(x-4)(x-5)-(x-2)(x-4)(x-5)=0$

$(x-4)(x-5)((x-3)-(x-2))=0$

$\left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x-5=0 \\ x-3-x+2=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=5 \\ -1=0 \end{array}\right.$ (нет реш-ий)

Ответ: $x=4$; $x=5$.

! Понижать на четную нельзя – вместо этого нужно восп-ся ф-ой $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Понижать на нечетное можно.

5. $3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 = 0$

Решение этого ур-ия есть выше в файле - в разделе степенные ур-ия

6. $5x^3 + 15x^2 - 4x - 12 = 0$

1) $(5x^3 + 15x^2) - (4x + 12) = 0$

2) $5x^2(x+3) - 4(x+3) = 0$

3) $(x+3)(5x^2 - 4) = 0$

! Все 3 действия важны в группировке

! Если решаешь ур-ие и не можешь понять, как его решить, то, скорее всего, это ур-ие 3 вида и нужно многочлен, равный 0, переводить в произведение

4. Уравнения, решаемые с заменой

Уравнения из этой группы очень разнообразны.

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$; тогда $x^4 = t^2$

! $x^2 = t$ – это ур-ие может быть использовано для выражения других многочленов с иксом через t. $x^2 = t \to x^2 + 5 = t + 5$

$\to x^6 = t^3$

! $\underbrace{4x = t \qquad 4x^2 = t^2}_{\text{неверно}}$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = 1 \end{array}\right.$ т.к. $x^2 = t$, то $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Ответ: $x = \pm 2; \pm 1$

! В данном случае $t \geq 0$ означает следующее - мы сами наложили это ограничение для t, чтобы сразу отсеять отрицательные t, неподходящие для приравнивания к x^2.

! Исходное ур-ие можно было воспринять как степенное (1 группа) и решить его делением.

2. $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1$

ОДЗ:

1) $(x-1)^2 \neq 0$ 2) $x-1 \neq 0$

$x-1 \neq 0$ $x \neq 1$

$x \neq 1$

Ур. опр. при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

— — — — —

Если решать это ур-ие как дробное, то при домнож. на общий зн-ль появится x^4! Это будет длинное решение.

Решим это ур-ие при помощи замены

Неправильная замена 1:

Пусть $x-1 = t$ — не упростит ур-ие

Непр-ая замена 2:

Пусть $\frac{x-1}{4} = t$

$\frac{x-1}{4} = \frac{t}{1} \Rightarrow \frac{4}{x-1} = \frac{1}{t} \;/ :2$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2t}$$

Уже нет смысла продолжать и выражать оставшиеся многочлены с x через t ($\frac{(x-1)^2}{8}$ и $\frac{8}{(x-1)^2}$), т.к. уже сейчас понятно, что ур-ие не стало проще после введённой замены.

Верная замена

Пусть $\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} = t$ (других вариантов замены не осталось)

$$\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1} = t \quad \uparrow^2$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - 1 + \frac{4}{(x-1)^2} = t^2$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{4}{(x-1)^2} = t^2 + 1 \quad \Big| \cdot 2$$

$$\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 2t^2 + 2$$

$$2t^2 + 2 = 7t - 1$$

II Тригонометрические уравнения

1) Тригонометрическая ф-ция, например, $\sin x$; $\cos 3x$, состоит из 2-ух компонентов

I: sin, cos, tg – сама ф-ция.
Работа с этим компонентом происходит по обычным правилам: $\sin\sqcup \cdot 3 = 3\sin\sqcup$
$\cos\sqcup\uparrow^2 = \cos^2\sqcup$

II x; $2x$; $5x$; 3α – угол
Работа с этим компонентом происходит по особым формулам.

2) При решении триг-их ур-ий нужно быть нацеленными на то, чтобы все углы всех ф-ций были одинак-ые.

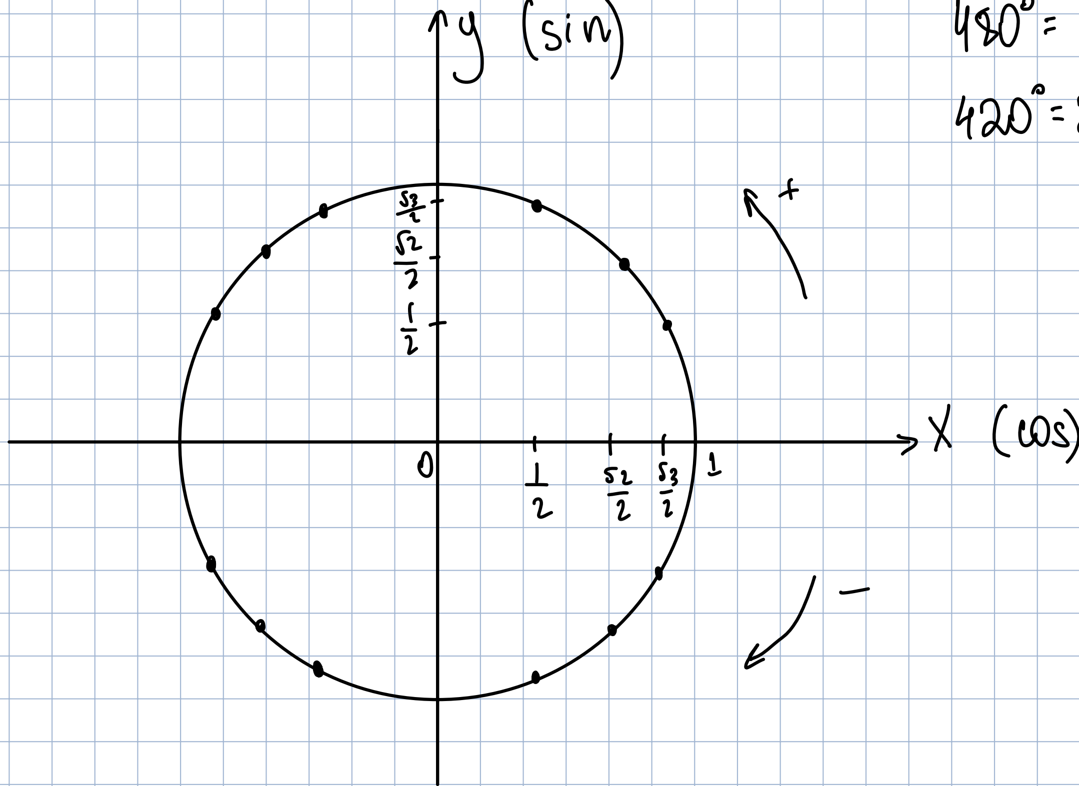
3) Многие триг. ур-ия "накладываются" на ур-ия 9 кл.

4) Чтобы решать триг. ур-ия и понимать основу преобразований, нужно уметь делать на триг. круге (единичной окружности) 2 вещи:

1) Откладывать на окружности данный угол и находить координаты угла

$480^\circ = 2\cdot 180^\circ + 90^\circ + 30^\circ$

$420^\circ = 2\cdot 180^\circ + 60^\circ$



Найти коорд-ты $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{3}$; $-\frac{17\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{11\pi}{3} = 3\pi + \frac{2\pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

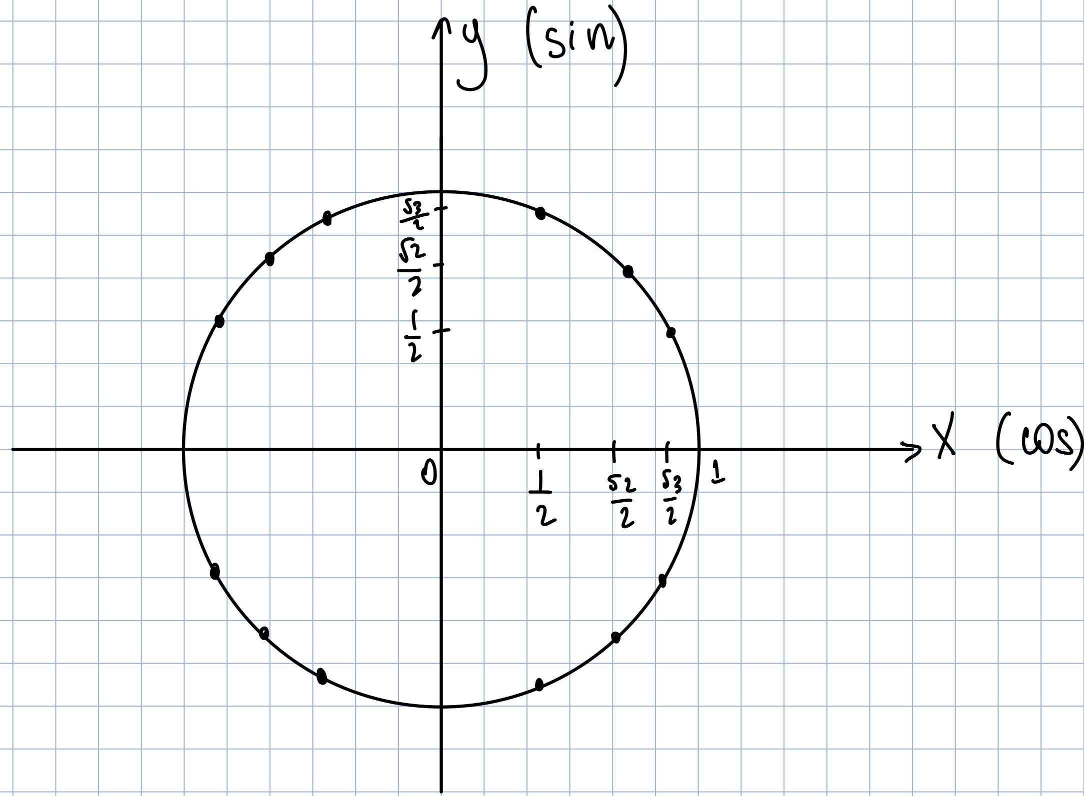
$-\frac{17\pi}{6} = -\left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\frac{11\pi}{3} =$ коорд по $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{11\pi}{3} =$ коорд по $x = \frac{1}{2}$

$tg\,\frac{11\pi}{3} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$

2) Находить угол по данным координатам.



Учитывая, что в каждую точку окружности попадает не 1 угол, а бесконечное множество углов (например, π и 3π; $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{9\pi}{4}$ попадают в одну точку на окр-сти), то ответом этого задания будет не 1 угол, а серия углов. Чтобы задать серией углы, нужно, сперва, написать любой угол из серии, а потом написать периодичность. Периодичность - то, какой делается шаг для получения следующего угла из серии.

Найти угол, попад-щий в точку с коор.

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

$B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$

5) Основное триг. тождество + 2 вытекающие ф-лы.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5} = 1$$

$$\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1$$

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Эти 3 ф-лы нужны для замены одной ф-ии на другую, например, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, и поиска значения ф-ии, зная значение другой ф-ии.

6) Ф-лы двойного угла (позволяют написать новую ф-цию, но с углом в 2 р. меньше)

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 6x = 2\sin 3x \cdot \cos 3x$$

$$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{10} = 2\sin \frac{3\pi}{20} \cdot \cos \frac{3\pi}{20}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

! $\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

7) Работа с отриц-ным углом

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg\alpha$

$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Например: $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-2x) = \cos 2x$

$tg\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = tg\left(-\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = tg\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) =$

$= -tg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

8) Формула суммы углов

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

9) Формула суммы ф-ии

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

10) Формулы приведения

Угол основы - угол, попадающий в точку пересечения окр-сти и осей координат

Формула приведения работает только там, где на месте угла стоит сумма или разность 2-ух углов:

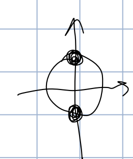
1) угол основы + $x; 2x; 3x; \frac{\alpha}{2} \dots$ ($x; 2x; 3x\dots$ все они острые)

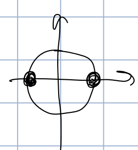
2) угол основы + $\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; \dots$ ($< \frac{\pi}{2}$)

Алгоритм преобразования:

1. определить четверть угла
2. определить знак по оригинальной функции
3. поменять или оставить изнач-ую ф-ию на против-ую

$\sin \rightleftarrows \cos$; $tg \rightleftarrows ctg$

! Поменять, если угол основы 

! Не менять, если угол основы 

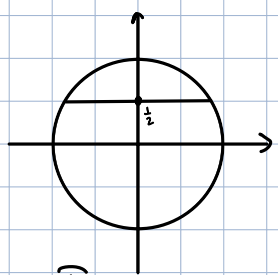
1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

2) $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = +\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

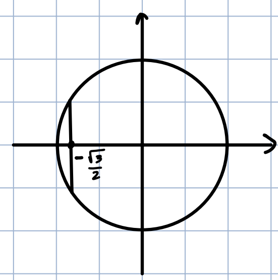
11. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$

Х стоит на месте угла => нужно найти угол, синус (коорд по у) которого $\frac{1}{2}$



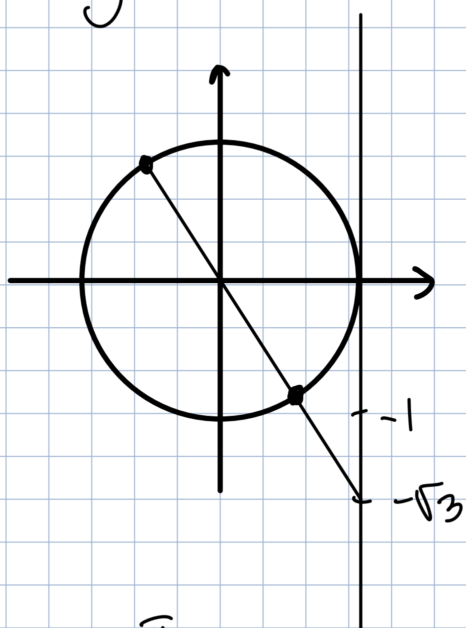
$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ $\quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

3) $tg\, x = -\sqrt{3}$



$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$

$k \in Z$ везде

12. Ф-лы половинн. угла (позволяют написать новую ф-цию, но с углом в 2 р. больше)

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$*\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Примеры:

1) $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

Пусть $\cos x = t$, $\quad -1 \le t \le 1$, т.к. значения $\cos x \in [-1;1]$

$6t^2 - 7t - 5 = 0$

$D = 49 + 120 = 169$

$t_1 = \frac{7+13}{12} = \frac{5}{3} > 1 \Rightarrow$ пост. корень

$t_2 = -\frac{1}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

2) $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos 2x = \cos x$

$2\cos^2 x - 1 = \cos x$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

3) $16\sin^4 x + 8\cos 2x - 7 = 0$

Разные углы. Сделаем их одинаковыми

$16\sin^4 x + 8(1 - 2\sin^2 x) - 7 = 0$

$16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 1 = 0$

$\sin^2 x = t$

4) $\cos 9x - \cos 7x = \sqrt{2}\sin x$

$-2\sin 8x \cdot \sin x - \sqrt{2}\sin x = 0$

Это ур-ие накладывается на ур-ие 9 кл II гр.

$$-\sin x\left(2\sin 8x+\sqrt{2}\right)=0$$

$-\sin x=0$ $\qquad 2\sin 8x+\sqrt{2}=0$

$\sin x=0$ $\qquad \sin 8x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\pi n$ $\qquad \left[\begin{array}{l} 8x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n \quad |:8 \\ 8x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \quad |:8 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{4}n \\ x=-\frac{3\pi}{32}+\frac{\pi}{4}n, n\in Z \end{array}\right.$

5) $2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0$

$\cos^2 x\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)+1\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0$

$\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\left(\cos^2 x+1\right)=0$

6) $\left(\cos x-\sin x\right)^2+\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos x=0$

$\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x+\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos 2x-\sin 2x\cdot\cos\frac{3\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos x=0$

$1-2\sin x\cdot\cos x+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)+\sqrt{3}\cos x=0$

$1-\cancel{\sin 2x}+\cos 2x+\cancel{\sin 2x}+\sqrt{3}\cos x=0$

7) $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5$

! $\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)=\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)\right)^2=\left(\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\cos x+\cos\frac{7\pi}{12}\sin x\right)^2$

и это плохое продолжение

$8\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2x\right)}{2}-2\sqrt{3}\cos 2x=5$

$4\left(1-\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2x\right)\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5$

$$4\left(1-\left(\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\cos2x-\sin\frac{7\pi}{6}\cdot\sin2x\right)\right)-2\sqrt{3}\cos2x=5$$

$$4\left(1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos2x-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sin2x\right)\right)-2\sqrt{3}\cos2x=5$$

$$4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x\right)-2\sqrt{3}\cos2x=5$$

$$4+\cancel{2\sqrt{3}\cos2x}-2\sin2x-\cancel{2\sqrt{3}\cos2x}=5$$

$$-2\sin2x=1$$

8) $\sqrt{3}\sin2x+3\cos2x=0 \;\Big|:\cos2x,\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$

! 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ – серия, в которой $\cos 2x$ равен 0

2) $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ означает, что серию $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ мы проверили на то, является она решением или нет, и поняли, что нет

$\Rightarrow$ делить можно.

$$\sqrt{3}\,tg2x+3=0$$

9) $2\cos^2x+2\sin2x=3$ $\qquad 1=\sin^2x+\cos^2x$

$$2\cos^2x+2\cdot2\sin x\cdot\cos x=3\cdot1$$

$$2\cos^2x+4\sin x\cdot\cos x-3\sin^2x-3\cos^2x=0$$

$$-\cos^2x+4\sin x\cdot\cos x-3\sin^2x=0$$

$\cos^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$1 - 4\underbrace{tg x} + 3\underbrace{tg^2 x} = 0$

10) $2\sin x + 3\cos x = 4$

$4\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 4 \cdot \left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$

Получится такое же ур-ие, как в п. 9.

11) $(2\sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$

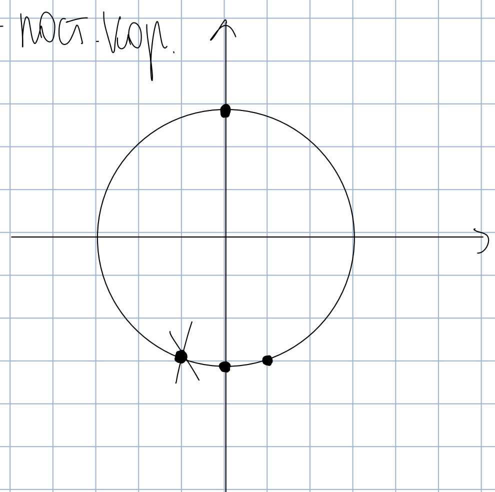
Ур. Огр. шрм.:

1) $\cos x \geq 0$

x - угол I и IV четв

$\left[\begin{array}{l} 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{\cos x} = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ – пост. кор.} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right.$



! В любом ур-ии, где есть $tg x$, $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

12) $2\sin 2x - \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$2\sin 2x = \underbrace{\cos x + \sqrt{3}\sin x}$ $/ : 2$

$\sin 2x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x$

$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = 0$

$\sin\alpha - \sin\beta = 0$

$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = 0$

III. Показательные и логарифмические ур-ия

Показат-ые ур-ия

Все пок-ые ур-ия делятся на 2 вида:

1) сводимые к форме $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

2) накладываемые на ур-ия 9 кл.

1) $3^x = 9$ (это ур-ие I группы)

$3^x = 3^2$

$x = 2$

2) $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$ (это и все ост. ур-ия из II гр)

$4^x - 8 \cdot 2^x + 15 = 0$

Пусть $2^x = t$, $t > 0$

$2^x = t \mid ^2 \longrightarrow 2^{2x} = t^2 \longrightarrow (2^2)^x = t^2 \longrightarrow 4^x = t^2$

$t^2 - 8t + 15 = 0$

$t_1 = 5 \quad t_2 = 3$

$2^x = 3$

$2^x = 2^{\log_2 3}$

$x = \log_2 3$

$2^x = 5$

$x = \log_2 5$

! В показ-ох ур-ях часто число в пок-ле превращают в коэф-нт перед степенью (особенно перед заменой)

3) $27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$

$(3^x)^3 - 5 \cdot (3^x)^2 - 9 \cdot 3^x + 45 = 0$

Для удобства сделаем замену, хоть она тут и не обязательна

Пусть $3^x = t$, $t > 0$

$t^3 - 5t^2 - 9t + 45 = 0$

$t^2(t-5) - 9(t-5) = 0$

4) $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0$

$9^{x-\frac{1}{2}} = 9^x \cdot 9^{-\frac{1}{2}} = 9^x \cdot \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^x \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = 9^x \cdot \frac{1}{3}$

$9^x - 7 \cdot 6^x + 12 \cdot 4^x = 0$

$(3^x)^2 - 7 \cdot 3^x \cdot 2^x + 12 \cdot (2^x)^2 = 0 \quad | : (2^x)^2, \ 2^x > 0$

1) $\frac{(3^x)^2}{(2^x)^2} = \left(\frac{3^x}{2^x}\right)^2 = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2$

2) $\frac{7 \cdot 3^x \cdot \cancel{2^x}}{(2^x)^{\cancel{2}}} = 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

3) $\frac{12 \cdot \cancel{(2^x)^2}}{\cancel{(2^x)^2}} = 12$

Замена: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$

Логарифм-ие ур-ия

1) Логарифм. ур-ия бывают 2-ух видов: 1) сводимые к $\log_a f(x) = \log_a g(x)$; 2) наклад-ые на уравнения 9 класса.

2) Лог. ур-ия – это ур-ия с изнач-ми огр-ми, как и ирраң. ур-ия. Поэтому решать лог. ур-ия нужно так же, как и ир-ые.

① $\log_5(3x-4) = \log_5(4x+1)$

а) I способ:

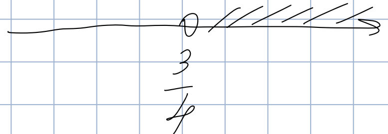
Ур-ие опр. при:

! $\log_a b$

$\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ b>0 \end{cases}$

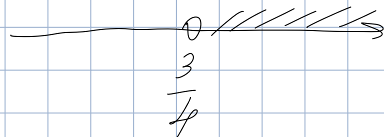
1) $3x-4>0$

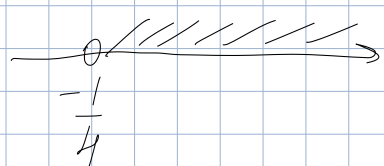
$x > \frac{3}{4}$

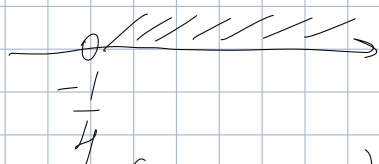


2) $4x+1>0$

$x > -\frac{1}{4}$







Ур-ие опр-о для $x \in \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$

$3x-4 = 4x+1$

$x = -5$ – не подх. под ОДЗ

Ответ: нет реш.

II способ

$3x-4 = 4x+1$

$x = -5$

Проверка:

$\log_5(3\cdot(-5)-4) = \log_5(4\cdot(-5)+1)$

$\log_5(-19) = \log_5(-11)$

$x = -5$ не явл. реш-ем.

Ответ: нет реш.

б) $\begin{cases} 3x-4>0 \\ 4x+1>0 \\ \log_5(3x-4) = \log_5(4x+1) \end{cases}$

2) $\log_2(x^2-14x)=5$

Ур. опр. при

⋮

$\log_2(x^2-14x)=\log_2 2^5$

$\log_2(x^2-14x)=\log_2 32$

$x^2-14x=32$

3) $6\log_2^2 x-5\log_2 x+1=0$

Ур. опр. при

! $\log_2 x\ ?^2=\log_2^2 x$ или $(\log_2 x)^2$

Пусть $\log_2 x=t$

4) $\log_2(x^4-1)=\log_2(x^4-3x^3+2x^2-5x+6)$

$$\begin{cases}x^4-1>0\\ x^4-3x^3+2x^2-5x+6>0\\ x^4-1=x^4-3x^3+2x^2-5x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-1>0\\ x^4-1=x^4-3x^3+2x^2-5x-6\end{cases}$$

! Логарифмические ур-ия лучше решать без ОДЗ, но с письменной проверкой. Т.е. II-ым способом

! Иррац-ые тоже лучше без ОДЗ, но с проверкой.

IV Иррац. ур-ия

! Любое ур-ие, в котором есть ограничения на иксе, (например, зн-ль или корень чет. ст. и т.д.) может быть решено без ОДЗ, но с письменной проверкой корней. Не писать ОДЗ и писать письм. проверку можно, т.к. у ур-ия ограниченное кол-во корней и каждый из них можно проверить на подлинность.

Коротко говоря, любое ур-ие с огр-ми можно решить 2-мя способами

1) Пишешь ОДЗ, решаешь ур-ие, оставляешь только те корни, которые лежат в промеж-те ОДЗ

Недостатки: 1) в ОДЗ м.б. много строчек + некот-ые из них сложно решить
2) не всегда понятно, какое ОДЗ писать, напр. в иррац. ур-ях!

2) Решаешь ур-ие, делаешь письм. пров-ку корней.

Недостатки: 1) если корень получился, напр, $\frac{\sqrt{3}-4}{5}$, то его м.б. сложно сложно проверить

У иррац-ых ур-ий с корнем ч.с. 2 ограничения

1) Подк-ое выр-ие д.б. ≥ 0
2) Выражение, которому равен корень, тоже д.б. ≥ 0

Есть 2 формы записи решения ур-ия I-ым способом:

I: оригинал + ОДЗ + решение ур-ия

II: оригинал + $\begin{cases} \text{ОДЗ} \\ \text{реш-ие ур-ия} \end{cases}$

II-ую форму иногда необходимо исп-ть. Например, если решаешь пример, где один из пунктов ОДЗ нельзя решить, ведь система позволяет "выкидывать" одну из строчек в системе.

Обосновываем ненужность некоторых строчек в сист-ме

1) $\begin{cases} 3-x>0 \\ 3-x=16 \end{cases} \Leftrightarrow 3-x=16$, т.к. при решении второй строчки мы найдём x, при котором многочлен $3-x$ будет равен 16 $\Rightarrow$ при этом иксе многочлен $3-x$ будет больше нуля точно. Т.е. I-ая строчка теряет актуальность или II строчка перебивает I-ую.

2) $\begin{cases} x^2-5x>2 \\ x^2-5x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-5x>3$

3) $\begin{cases} x^2 - 5x < 2 \\ x^2 - 5x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 5x < 2$

4) $\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x^4 - 6x > 0 \\ x^2 - 3x = x^4 - 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x^2 - 3x = x^4 - 6x \end{cases}$ или $\begin{cases} x^4 - 6x > 0 \\ x^2 - 3x = x^4 - 6x \end{cases}$

Т.к. решение 3-ей строчки подразумевает поиск такого икса, при котором $x^4 - 6x$ будет равен $x^2 - 3x$, а если $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow$ и $x^4 - 6x$ будет > 0

5) $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ 2x - 4 < 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 2x - 4 < 3 - x \end{cases}$

! Ответ 1-ой и 2-ой системы примера 5 будет одинаковым. Но нужно уметь выкидывать строчки из системы, т.к. выкинуть можно иногда те, которые нерешаемы или очень сложные.

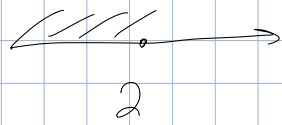
1) $\sqrt{6-3x}=\sqrt{4+5x}$

I способ:

а) Ур. опр. при

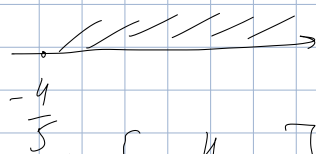
1) $6-3x\geq 0$

$x\leq 2$



2) $4+5x\geq 0$

$x\geq -\frac{4}{5}$



Ур. опр. при $x\in\left[-\frac{4}{5};2\right]$

$\sqrt{6-3x}=\sqrt{4+5x}\quad|^2$

$6-3x=4+5x$

$2=8x$

$x=\frac{1}{4}$ – подх по ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{4}$

II способ:

$\sqrt{6-3x}=\sqrt{4+5x}\quad|^2$

$6-3x=4+5x$

$2=8x$

$x=\frac{1}{4}$

Проверка:

$\sqrt{6-0{,}75}=\sqrt{4+1{,}25}$

$\sqrt{5{,}25}=\sqrt{5{,}25}$

$x=\frac{1}{4}$ явл. корнем

Ответ: $\frac{1}{4}$

б) $\begin{cases}6-3x\geq 0\\ 4+5x\geq 0\\ \sqrt{6-3x}=\sqrt{4+5x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6-3x\geq 0\\ 4+5x\geq 0\\ 6-3x=4+5x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4+5x\geq 0\\ 6-3x=4+5x\end{cases}$ или $\begin{cases}6-3x\geq 0\\ 6-3x=4+5x\end{cases}$

2) $\sqrt{x^4+8x^3+2x^2-1} = \sqrt{x^4+2x^2}$

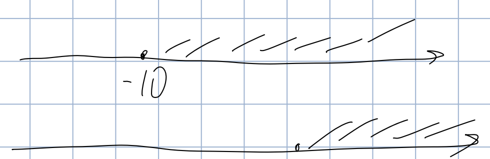
$$\begin{cases} x^4+8x^3+2x^2-1 \geq 0 \\ x^4+2x^2 \geq 0 \\ x^4+8x^3+2x^2-1 = x^4+2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+2x^2 \geq 0 \\ x^4+8x^3+2x^2-1 = x^4 \end{cases}$$

3) $\sqrt{x+10} = x-2$

Ур. опр. при

1) $x+10 \geq 0$

2) $x-2 \geq 0$ — это огр-ие мы пишем, чтобы избежать ситуации, когда а $\sqrt{\ }$ = отриц. числу



$x \in [2; +\infty)$

$x+10 = x^2-4x+4$

$x^2-5x-6=0$

$x_1 = 6$

$x_2 = -1$ — не подх.

4) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$

$x+7+2\cdot\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x-2}+x-2 = 81$

$2\sqrt{(x+7)(x-2)} = 76-2x \quad |^2$

$4\cdot(x+7)(x-2) = 5776-304x+4x^2$

Проверка: ....

V Ур-ия с модулем

1) Модуль может быть изначально дан или он может появиться в ходе преобразований ($\sqrt{x^2}=|x|$, $\log_3(x-4)^2 = 2\log_3|x-4|$).

2) Как раскрывать модуль, если подмодульное выражение всегда положительно или всегда отрицательно?

То, что мы и так знаем:

1) $|7| = +(7) = 7$
2) $|-5| = -(-5) = 5$

На этих примерах легко увидеть и понять закон-сть: если подмодульное выражение всегда положительно, то модуль меняется на скобки и выкидывает перед собой ⊕.

А если подмодульное выражение отрицательно, то модуль меняется на скобки и выкидывает перед собой ⊖, например, $|-1| = -(-1) = 1$;

$|x^2+1| = +(x^2+1)$
$|4x^2+20| = +(4x^2+20)$
$|-7x^4-10| = -(-7x^4-10)$
$|x-3| = +(x-3)$, если задано условие $x>7$,
$|x-3| = -(x-3)$, если задано условие $x<2$

! что $+(x-3)$, что $-(x-3)$ будут >0 при зад-их иксах

! Значения нераскрытого модуля ≥ 0. А если модуль раскрыт, то значение многочлена, на которое раскрыт-ся модуль, тоже будет ≥ 0

3) Как раскрыть модуль, если подмодульное выражение иногда положительно, а иногда отриц-о? Т.е, например, в ур-ии (нер-ве) есть $|x-4|$ и нет наложенных условий?

Очень просто. Нужно разбить рассмотрение примера на такие интервалы, при которых подмодульное выражение будет всегда полож. или всегда отриц-ым

Применим данную технику решения ур-ий и нер-в в задании, где нет модуля

$x^2-5x+3=-1.$

Разобьем рассм. этого ур-ия на 3 случая (интервала): до -3; от -3 до 5; от 5.

Интервалов могло быть больше (4,5...) и меньше. И сами интервалы могли быть другими. Но сейчас мы увидим, что нет смысла делать это в этом ур-ии, т.к. в каждом интервале (случае) ур-ие не изменится.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3 \\ x^2 - 5x + 3 = -1. \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 5x + 3 = -1. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5 \\ x^2 - 5x + 3 = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Но в других ур-ях, например в ур-ях с модулем, имеет смысл разбивать, т.к. ур-ие с модулем в каждом случае уже будет без модуля, т.к. в каждом случае подмод. выр-ие будет всегда + или −.

$$\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 - x + 5} = 1$$

Начнём решать это др. ур-ие. Пока модули не трогаем.

ОДЗ:

1) $x^2 - x + 5 \neq 0$

$D < 0 \Rightarrow x \in R$

Ур-ие опр. при $x \in R$

$$\frac{|x^2-4x|+3}{x^2-x+5} = 1 \qquad \Big|\cdot x^2-x+5,\quad x^2-x+5 \neq 0$$

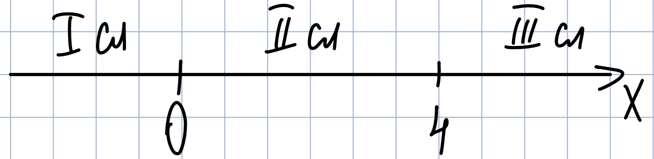
$$|x^2-4x|+3 = x^2-x+5$$

Как понять, на какие интервалы нужно разбить пример? Нужно каждое подм-ое выраж. прир-ть к 0 и полученные корни (т. перех) разобьют числовую прямую на случаи.

1) $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x=0 \qquad x=4$



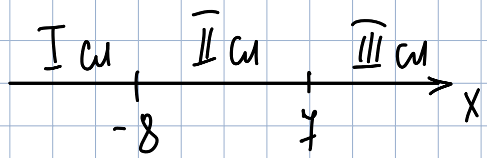
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ +(x^2-4x)+3 = x^2-x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ -(x^2-4x)+3 = x^2-x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} x>4 \\ +(x^2-4x)+3 = x^2-x+5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x=-\frac{2}{3} \quad + \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \quad + \\ x_2 = \frac{1}{2} \quad + \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>4 \\ x=-\frac{2}{3} \quad - \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -\frac{2}{3};\ 2;\ \frac{1}{2}$

② $|8+x| + |x-7| = 10$

1) $8+x=0$ $\quad$ 2) $x-7=0$

$x=-8$ $\quad$ $x=7$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -8 \\ -(8+x)-(x-7)=10 \end{cases} \\ \begin{cases} -8 \le x \le 7 \\ (8+x)-(x-7)=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 7 \\ (8+x)+(x+7)=10 \end{cases} \end{array}\right.$$

Разберём 2 частных случая ур-ний с модулем, знание которых позволит быстрее решать ур-ия, чем точками перехода.

1) $|f(x)| = g(x)$

$$\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

2) $|f(x)| = |g(x)|$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

VI Ур-ия смешанного типа

Примеры:

1. $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$

$$(3 \cdot 5)^{\cos x} - 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} = 0$$

$$3^{\cos x} \cdot 5^{\cos x} - 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x} = 0$$

$$3^{\cos x}\left(5^{\cos x} - 5^{\sin x}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 3^{\cos x} = 0 \quad \text{нет решений} \\ 5^{\cos x} = 5^{\sin x} \end{array}\right.$$

$$\cos x = \sin x$$

2. $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = 4^{2\cos^2 x - \cos x}$

$$3^{\cos x - 2\cos^2 x} = 4^{2\cos^2 x - \cos x}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos^2 x - \cos x} = 4^{2\cos^2 x - \cos x} \quad \Big/ : 4^{2\cos^2 x - \cos x}$$

$$\left(\frac{1}{12}\right)^{2\cos^2 x - \cos x} = \left(\frac{1}{12}\right)^0, \text{ т.к. } \left(\frac{1}{12}\right)^0 = 1$$

$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$

3. $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$

$9^{\sin x} + \frac{1}{9^{\sin x}} = \frac{10}{3}$

Пусть $9^{\sin x} = t$, $t > 0$

$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$

$\frac{3t^2 - 10t + 3}{3t} = 0$

$3t^2 - 10t + 3 = 0$

4. $\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \log_{13} (2\sin^2 x)}{\log_{31} (\sqrt{2} \cos x)} = 0$

Ур. опр. при

1) $2\sin^2 x > 0$

$\sin^2 x > 0$

$\sin x \neq 0$

$x \neq \pi n$

2) $\sqrt{2} \cos x > 0$

$\cos x > 0$

x - угол I и IV ч.

3) $\log_{31}(\sqrt{2}\cos x) \neq 0$

$\sqrt{2}\cos x \neq 1$

$\cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$

4) $\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$$\left[\begin{array}{l} tg x+\sqrt{3}=0 \\ \log_{13}(2\sin^2 x)=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} tg x=-\sqrt{3} \\ 2\sin^2 x=1 \end{array}\right.$$

5. $\log_4\left(2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x\right)=x$

$$\begin{cases} 2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x>0 \\ 2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x=4^x \end{cases}$$

Мы использовали систему с 2-мя строчками, первая из которых ОДЗ, а вторая решение.
Система подр-ет, что мы найдем такой x, который одновременно удовл-ит ОДЗ и при котором сойдется ур-ие.
Но решения II строчки полностью удовл-ит I-ую!
Т.к. корни 2-го ур-ия обратят $2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x$ в положит-ое знач-ие $(=4^x)$ => нер-во $2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x>0$ при этих иксах (II-го ур-ия) точно выполнится

$$\begin{cases} 2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x>0 \\ 2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x=4^x \end{cases}$$

$2^{2x}-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x=4^x$

$-\sqrt{3}\cos x-\sin 2x=0$

Работу выполнил:

Одикадзе Г.Г.