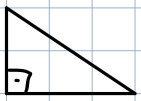
ЕГЭ. Задание 16. Планиметрия

1. Вся необходимая теория
2. Сборник решенных задач

Данный файл предназначен для получения полной базы, необходимой для начала работы с заданием 16 ЕГЭ.

1. Вся необходимая теория

I Прямоугольный треугольник



①	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

! Данной табл. можно пользоваться только в прямоуг. треуг-ке.

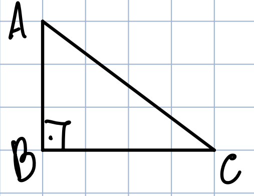
$$\sin\alpha = \frac{\text{против. кат}}{\text{гипот.}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{прилеж. кат}}{\text{гипот.}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{прот. кат}}{\text{прил. кат}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

② Теорема Пифагора

Квадрат длины гип-зы равен сумме квадратов длин катетов.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Эта теорема является уравнением и позволяет найти длину любой стороны, зная длины двух сторон в △

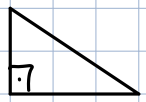
③ Теорема обратная теореме Пиф-ра

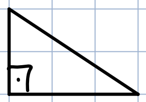
Если квадрат длины наиб. стороны равен сумме квадратов длин других 2-ух сторон, то треуг. прям-ой.

Эта теорема позволяет доказать, что треуг-к прямоуг-ый.

④ Медиана, опущенная на гипотенузу, равна половине гипотенузы

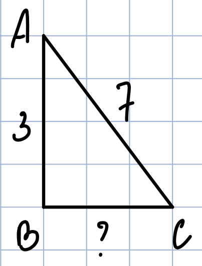
! Радиус опис-ой окр-сти равен половине гип-зы

⑤ Если в  известны 1) сторона и угол
2) 2 стороны ,

то этот  можно решить

Задачи:

1.



Дано:

AB = 3; AC = 7;

BC - ?

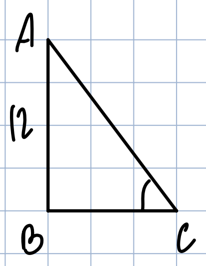
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$9 + BC^2 = 49$$

$$BC^2 = 40$$

$$BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

2.



Дано:

AB = 12 ; $\sin C = \frac{2}{3}$

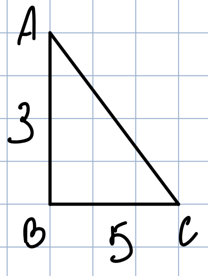
AC - ?

$$\sin C = \frac{2}{3} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{AC}$$

$$AC = 18$$

3.



Дано:

AB = 3; BC = 5

cos A - ?

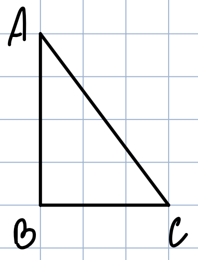
$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{AC}$; AC - ?

$AC^2 = 9 + 25$

$AC = \sqrt{34}$

$\cos A = \frac{3}{\sqrt{34}}$

4.



Дано:

AB = 12; $\sin A = \frac{4}{5}$;

AC - ?

I способ

$\sin A = \frac{4}{5} = \frac{BC}{AC}$

Пусть BC = 4x; AC = 5x

$16x^2 + 144 = 25x^2$

$9x^2 = 144$

$x^2 = \frac{144}{9}$

$x = \frac{12}{3} = 4$; BC = 16; AC = 20

II способ

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

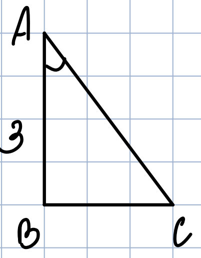
$\cos^2 A = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$, т.к. все углы в △ < 90°

$\frac{3}{5} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{3}{5} = \frac{12}{AC}$

$AC = 20.$

5.



Дано:

$\angle A = 30°$; $AB = 3$

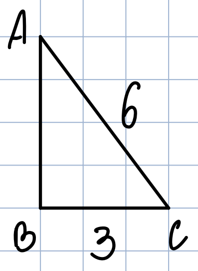
$BC - ?$

$tg\, 30° = \frac{BC}{AB}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{3}$

$BC = \frac{3}{\sqrt{3}}$

6.



Дано:

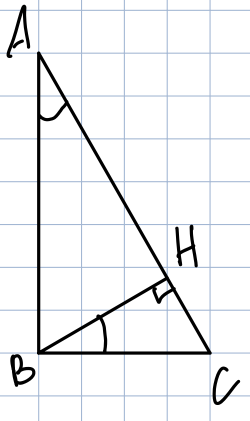
$BC = 3$; $AC = 6$

$\angle C - ?$

$\cos C = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

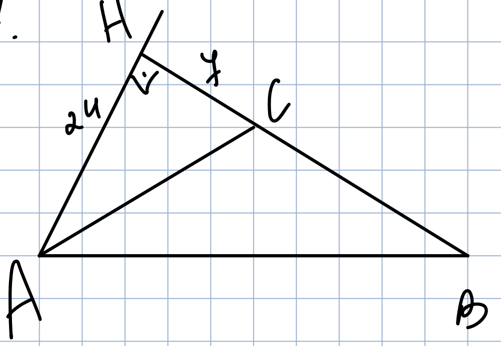
$\angle C = 60°$

!



$\angle BAC = \angle HBC$,
если BH-выс.

7.



Дано:
$AH=24$
$CH=7$
$\cos ACB - ?$

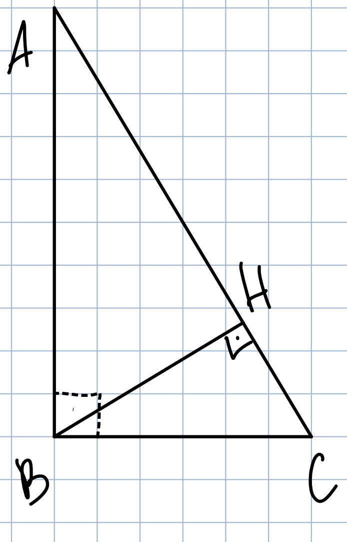
1) $AC=25$

2) $\cos ACH = \frac{7}{25} = 0{,}28$

3) $\cos\angle ACB = \cos(180 - \angle ACH) =$
$= -\cos ACH = -0{,}28$

8.

$BH^2 = AH \cdot HC$



II Равнобедренный Δ

Признак - это информация, наличие и соблюдение которой позволит сделать определенные выводы. Например, признак равнобедренного треугольника - если в треугольнике две стороны равны, то треугольник равнобедренный. То есть наличие 2 равных сторон позволяет сделать вывод, что треугольник особенный - равнобедренный. Признаки нужны для доказательства чего-то.

Свойство - информация, которой можно пользоваться, уже зная что-то. Например, свойство равнобедренного треугольника - если треугольник равнобедренный, то у него есть 2 равные стороны. То есть мы знаем, что треугольник равнобедренный, и делаем отсюда выводы.

3 признака р/б Δ

1. Если в Δ 2 угла равны, то этот Δ р/б.

Сторона, к которой будут прилегать 2 этих угла, будет назыв-ться основанием р/б Δ, а две другие стороны будут наз-ться бок. стор. р/б Δ.

2. Если в Δ 2 стороны равны, то этот Δ р/б.

Равные стороны будут наз-ться б.с. р/б Δ, а третья-осн-ем.

3. Если в Δ какой-то отрезок выполняет 2 функции из 3-ёх (из каких 3-ёх? Бисс, мед, высота), то этот Δ р/б.

Сторона, куда падает этот отрезок, будет наз-ться осн-ем р/б Δ, а две другие бок. ст-ми.

3 свойства р/б △

1. в р/б △ б.с. равны
2. в р/б △ углы при осн-ии равны
3. в р/б △ отрезок, вып-щий одну из 3-ёх ф-ии и падающий на основание, будет вып-ть все 3 ф-ии из 3-ёх.

III Равенство треуг-ов

Равные △-ки - это такие △, у которых есть по 3 равные стороны и по 3 равных угла.

Признаки рав-ва △

Это инф-ия, по которой можно доказать, что два △ равны.

1. Если две стороны и угол между ними одного △ соотв-о равны двум сторонам и углу между ними другого △, то такие △ равны.

2. Если сторона и два прил-щих к ней угла одного △ соотв-о равны стороне и двум прилеж-им углам другого △, то такие △ равны.

3. Если 3 стороны одного △ соотв-о равны 3-ем сторонам другого △, то такие △-ки равны.

Свойство равных △

Св-во: В равных △-ах напротив равных углов лежат равные стороны и наоборот.

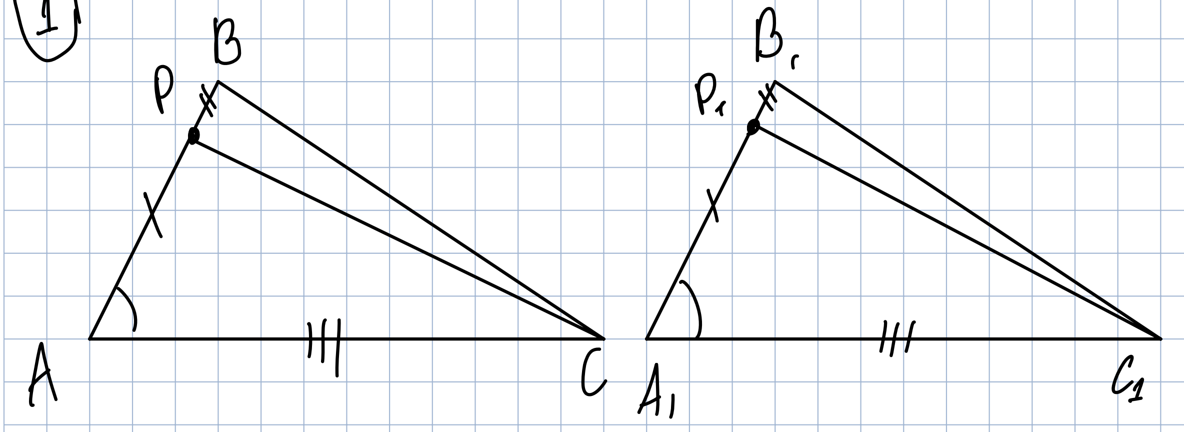
Св-ом можно польз-тся только после док-ва равенства треуг-ов

Свойство нужно для создания верных пар новых углов и сторон в △-ах.

Также для получения рав-ва новых углов и отрезков можно использовать другие углы и отрезки.

Задачи:

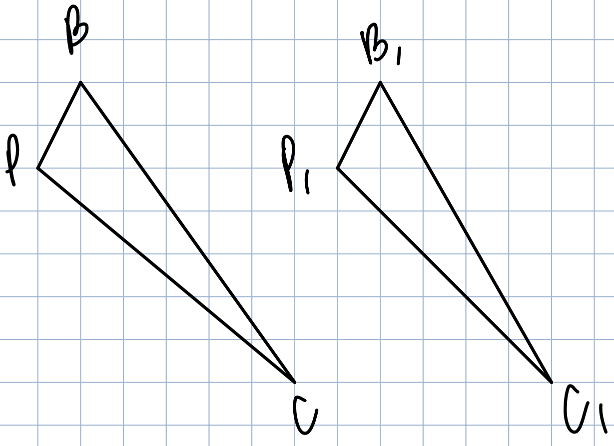
①



Дано:

1) $AB = A_1B_1$
2) $AC = A_1C_1$
3) $\angle A = \angle A_1$
4) $AP = A_1P_1$

док, что $\Delta BPC =$
$= \Delta B_1P_1C_1$



(можно нар-ть 2 Δ, равенство кот-ых нужно док-ть. Изначально в этих Δ-ах ничего не равно.)

1) $PB = \underset{\parallel\text{ по усл}}{AB} - \underset{\parallel\text{ по усл}}{AP}$
$P_1B_1 = A_1B_1 - A_1P_1$ $\Rightarrow PB = P_1B_1$

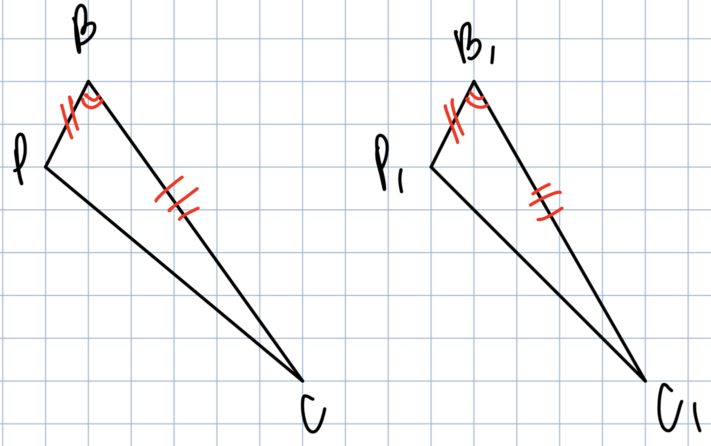
2) рассм ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
1) $AB = A_1B_1$ (по усл)
2) $AC = A_1C_1$ (по усл)
3) $\angle BAC = B_1A_1C_1$ (по усл)
$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по I пр)

4) $BC = B_1C_1$

5) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

6) $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$

3) рассм $\triangle PBC$ и $\triangle P_1B_1C_1$



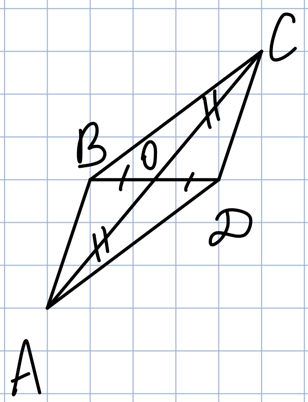
1) $PB = P_1B_1$ (п. 1)

2) $\angle PBC = \angle P_1B_1C_1$ (п. 2.5)

3) $BC = B_1C_1$ (п 2.4)

$\Rightarrow \triangle PBC = \triangle P_1B_1C_1$ по 1 пр.

②



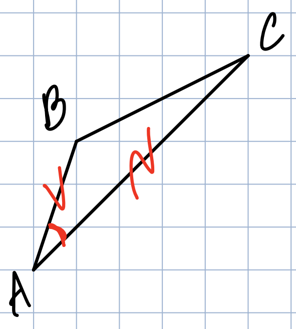
Дано:

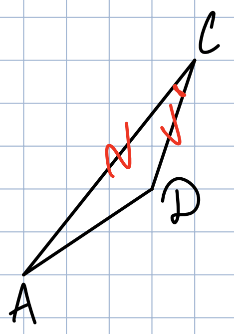
1) $BO = OD$; $AO = OC$

— — — — — —

док, что $\triangle ABC = \triangle CDA$

Решение:





1. рассм $\triangle BOA$ и $\triangle COD$
   1) $BO = OD$ (по усл)
   2) $AO = OC$ (по усл)
   3) $\angle BOA = \angle COD$ (верт)

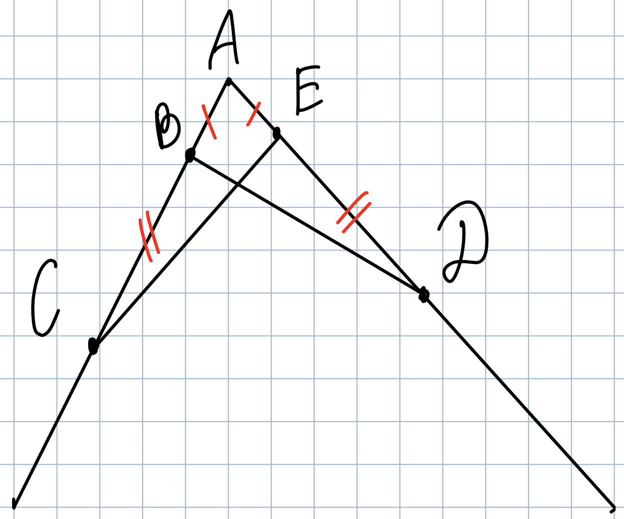
$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD$ по I пр

$\Rightarrow$ 4) $AB = CD$
   5) $\angle BAO = \angle OCD$

2. рассм $\triangle BAC$ и $\triangle ACD$
   1) $AB = CD$ (док. в п. 1)
   2) AC – общ
   3) $\angle BAC = \angle ACD$ (док в п 1)

$\Rightarrow \triangle BAC = \triangle ACD$ по I пр.

③



Дано:

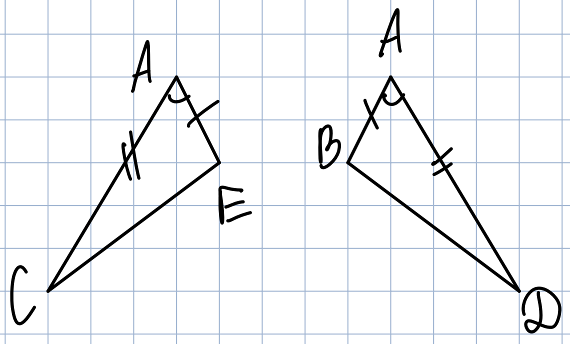
$AC = AD$; $AB = AE$

док, что $\angle CBD = \angle DEC$

1) $BC = AC - AB$

$DE = \overset{\text{\\\\ по усл}}{AD} - \overset{\text{\\\\ по усл}}{AE}$ $\Rightarrow BC = DE$

2) рассм $\triangle CAE$ и $\triangle DAB$



1) $AC = AD$
2) $AE = AB$
3) $\angle CAE = \angle BAD$

$\Rightarrow \triangle CAE = \triangle DAB$

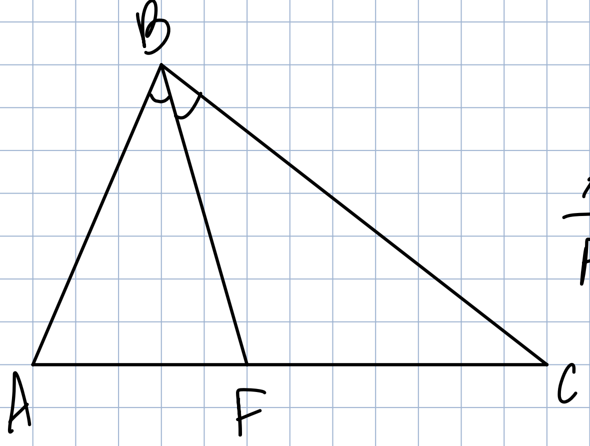
4) $CE = BD$
5) $\angle ACE = \angle ADB$
6) $\angle AEC = \angle ABD$

3) $\angle CED = 180 - \angle AEC$

$\angle CBD = \overset{\parallel}{180} - \overset{\parallel\ \text{п2}}{ABD}$

$\Rightarrow \angle CED = \angle CBD$

! <u>СВ-во бисс-сы Δ</u>



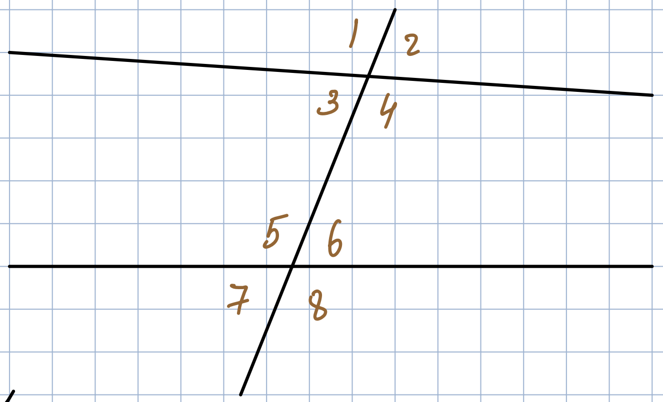
Если BF - бисс-са, то

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{или} \quad \frac{AF}{AB} = \frac{FC}{BC}$$

! $\alpha = \dfrac{180 \cdot (n-2)}{n}$ – формула нахождения величины одного угла правильного n-угольника, где n – кол-во сторон (углов) многоуг-ка.

! Точка пересечения медиан любого Δ-ка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

IV Парал-сть прямых



При пересечении двух прямых третьей образуется 8 углов

Накрест леж-ие — 3 и 6; 4 и 5

Соотв-ые — 1 и 5; 2 и 6; 3 и 7; 4 и 8

Одност-ие — 3 и 5; 4 и 6

3 признака парал-ых прямых

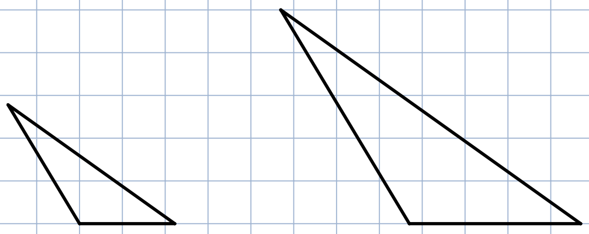
1. Если накрест лежащие углы равны, то прямые пар-ы.
2. Если соответственные углы равны, то прямые пар-ы.
3. Если одност. углы в сумме дают 180°, то прямые пар-ы.

3 св-ва парал-ых прямых

1. Если прямые ∥-ы, то накрест лежащие углы равны
2. Если прямые ∥-ы, то соответственные углы равны
3. Если прямые ∥-ы, то одност. углы в сумме дают 180°

V Подобные треугольники

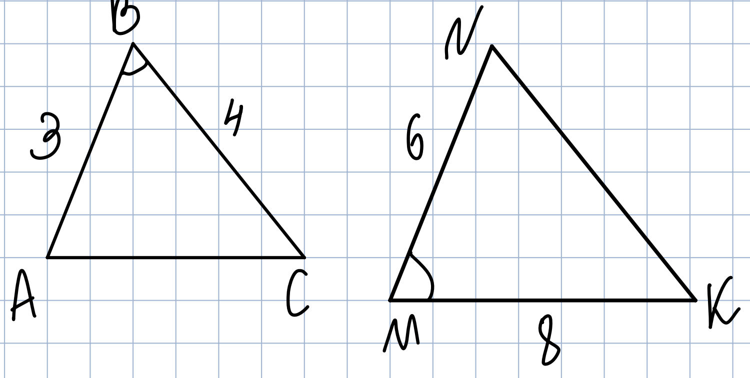
Подобные Δ-ки - это Δ-ки одинаковой формы, но разного размера. Δ-ки наз-ся подобными, если их углы соответственно равны, а стороны одного Δ сходств-ы сторонам другого Δ (равенство углов и нер-во сторон и означает, что Δ-ки одинаковой формы)



3 признака подобных Δ-ов

1. Если 2 угла одного Δ-ка равны 2-ум углам другого Δ-ка, то такие Δ-ки подобны

2. Если в 2-ух треуг-ах есть по 1-му равному углу, а две стороны I-го треуг-ка, образующие равный угол, сходственны (т.е. образуют верную двойную пропорцию) 2-ум сторонам другого Δ-ка, то такие Δ-ки подобны.



Дано:

∠B = ∠M; AB=3; BC=4;

MN=6; MK=8

подобны ли Δ-ки ABC и MNK?

4 стороны, обр-щие равные углы: AB, BC, MN, MK. Если я смогу расположить эти 4 стороны в верную двойную пропорцию, то эти △-ки будут подобными. Верной она будет называться тогда, когда в пропорции наверху будут стороны одного △-ка, внизу другого, и получится равенство.

$$\frac{^{3}AB}{_{6}MN}=\frac{BC^{4}}{MK_{8}}$$

Получилась верная пропорция => да, △-ки подобны.

3. Если 3 стороны I-го △-ка сходственны 3-ём сторонам другого △-ка, то такие △-ки подобны.

Св-ва подобных △-ов

1) В подобных треуг-ах 3 стороны I-го △-ка сходственны 3-ем сторонам II-го △-ка (пары сходственных сторон лежат напротив равных углов и отношение сходственных сторон = коэффициент подобия △-ов)(!этим св-ом польз., если исп. I пр)
Одним словом, это свойство подобных △-ов позволяет написать 3-ую пропорцию, которая иногда нужна для поиска длин сторон.

2) В подобных 3-ках напротив сходств-ых сторон лежат равные углы. (!этим св-ом польз., если исп. II или III пр)

VI Четырехугольники

а) Параллелограм

4 признака пар-ма

1) Если в 4-ке 2 стороны парал-ы и равны, то ЭТОТ 4-ех угольник пар-м

2) Если в 4-ке есть 2 пары парал-ых сторон, то ЭТОТ 4-ех угольник пар-м

3) Если в 4-ке есть 2 пары равных сторон, то ЭТОТ 4-ех угольник пар-м

4) Если в 4-ех уг-ке диагонали точкой пересече-ния делятся пополам, то это пар-м.

Свойства пар-ма

1) В пар-ме против-ые стороны равны и парал-ы

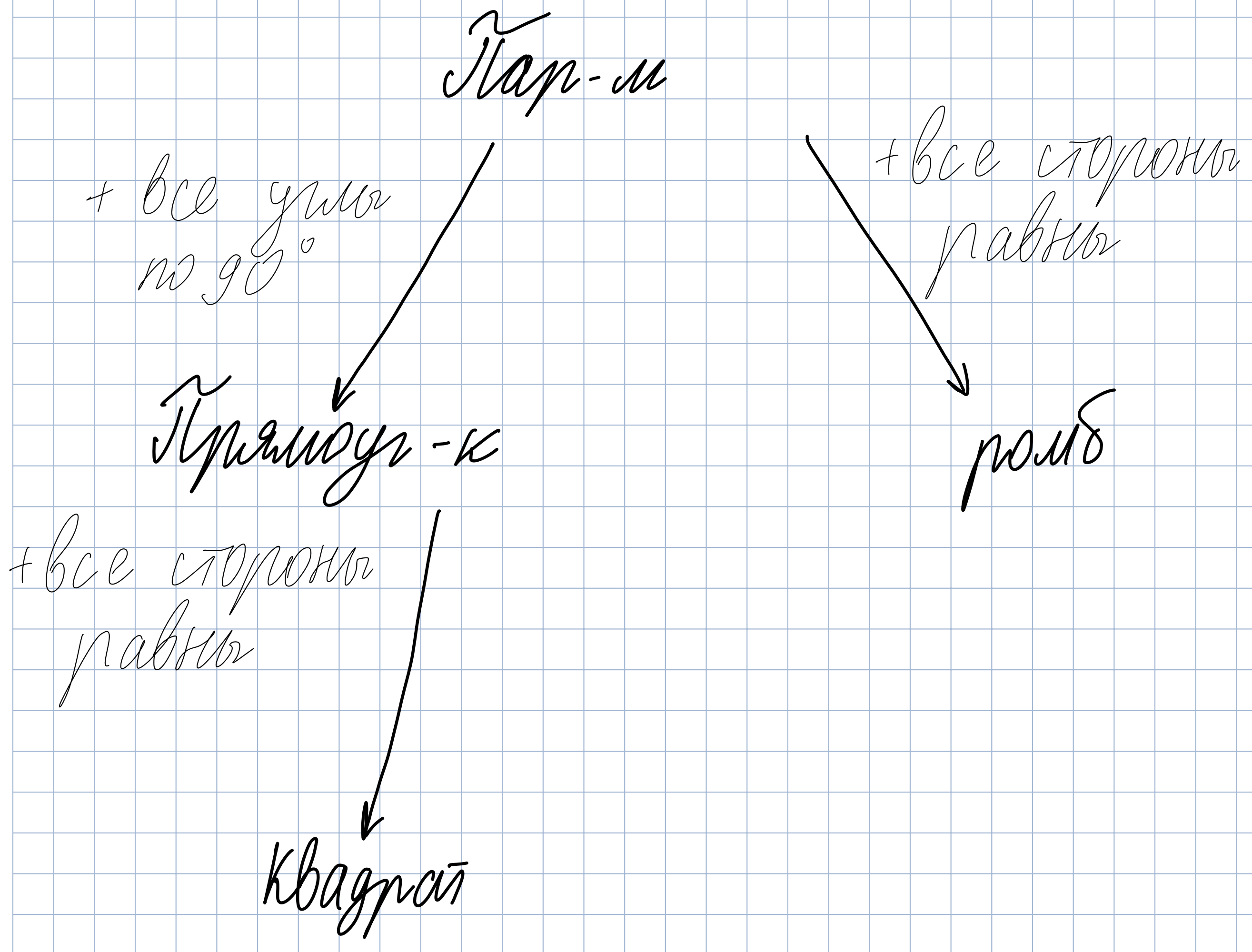
2) В пар-ме прот-ые углы равны

3) В пар-ме диагонали точкой пересечения делятся пополам.

б) Трапеция – 4-к, у которого есть 2 парал-ые стороны.

Равнобедр-ая трап-ия – трап, в кот-ой боковые стороны равны

Прямоуг-ая трап-ия – трап-ия, у которой 2 угла по 90°



! Данная схема четко показывает, что ромб, квадрат и прям-к являются пар-ми.

VII Площади

1. $S_{\square} = a^2$
2. $S_{▭} = a \cdot b$
3. $S_{▱} = a \cdot h_a$
4. $S_{\bigcirc} = \pi R^2$
5. $S_{⏢} = \frac{осн + осн}{2} \cdot h$
6. $S_{\Diamond} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$
7. $S_{\triangle} =$ а) $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

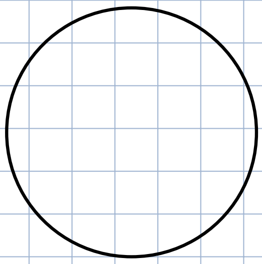
   б) $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \widehat{ab}$

   в) $\frac{1}{2} \cdot P \cdot r$ (эта ф-ла работает во всех фигурах)
8. $S_{◺} = \frac{1}{2} \cdot кат \cdot кат$

! Площади подобных $\triangle$-ов относятся как k^2

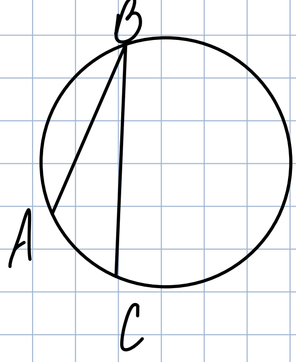
VIII Окружность и углы

1)



Вся окружность 360°.

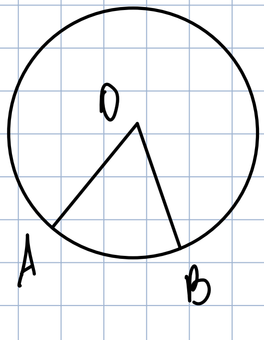
2) Вписанный угол в окр-сть



Впис-ым называется тот угол, вершина которого лежит на окруж-сти

$\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

3)

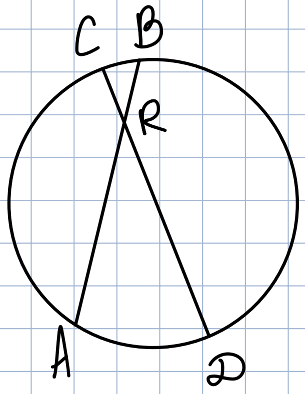


Центр-ым называется тот угол, вершина которо лежит в центре окр-сти.

$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$

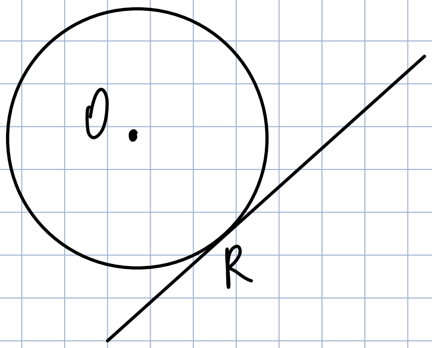
IX Теоремы, связ-ые с окр-ью

1)

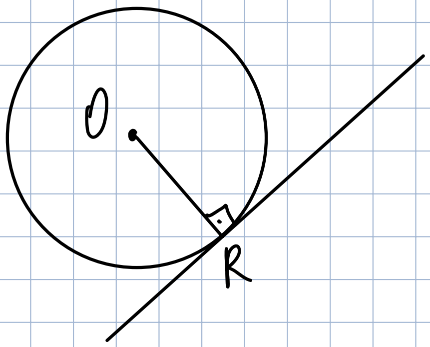


$CR \cdot RD = BR \cdot AR$

2)

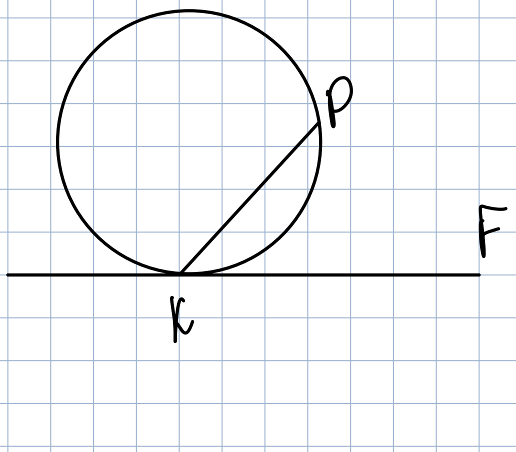


Дана окр-сть и кас-ая



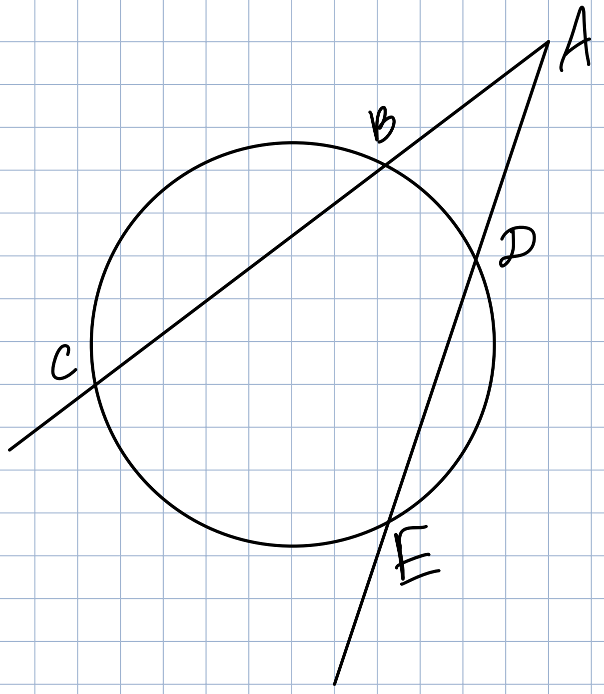
Если провести радиус в точку касания, то радиус будет ⊥ кас-ой

3)



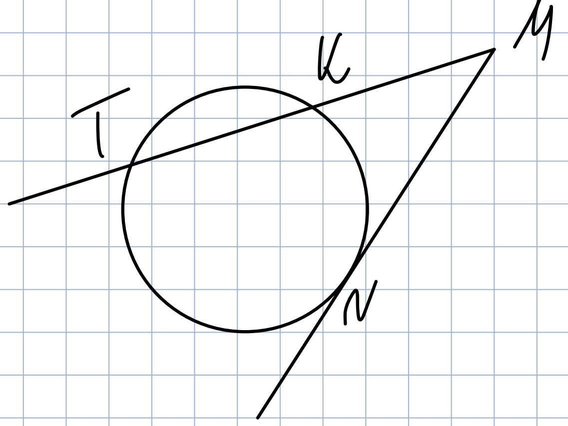
$\angle PKF = \frac{1}{2} \overset{\frown}{KP}$

4)



$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

5)

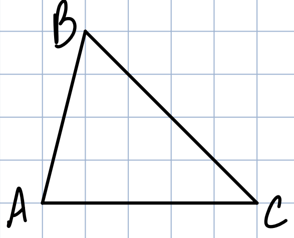


$MN^2 = MK \cdot MT$

X Теорема косинусов

Теорема косинусов - самая частая теорема при работе с Δ. Теорема кос-ов работает во всех Δ.

Теорему косинусов можно написать для любого угла Δ => => Теор. Кос можно написать 3 раза в любом Δ-ке.



1) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

2) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$

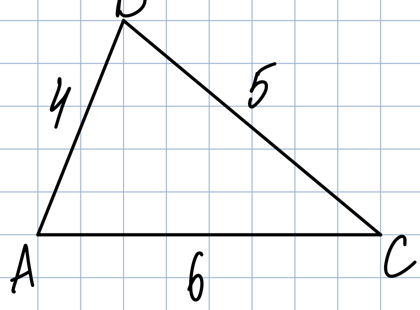
3) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$

Теор. кос - уравнение, включающее в себя 4 элемента Δ - 3 стороны и косинус угла

=> зная 3 элемента в Δ-ке из 4-ех, можно найти 4-ый

Задачи:

①



Найти cos B; sin B; ∠B - острый или тупой?

1) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$

$36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos B$

$\cos B = \frac{-5}{-40} = \frac{1}{8}$

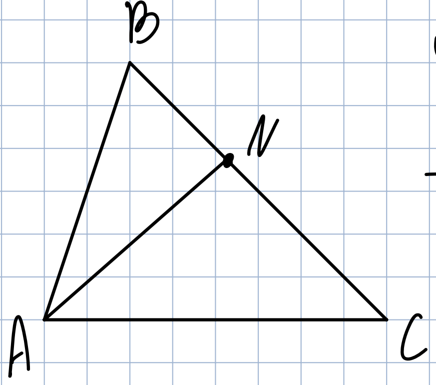
2) $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$\sin^2 B + \frac{1}{64} = 1$

$\sin B = \pm \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, т.к. $0 < \angle B < 180$

3) $\cos B = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow 0 < \angle B < 90$ (I четв)

②



Дано: $AB = 4$; $BC = 12$; $AC = 10$; $BN : NC = 1 : 2$

Найти AN

1) $BN = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$

2) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$

$100 = 16 + 144 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \cos B$

$\cos B = \frac{-60}{-96} = \frac{60}{96} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

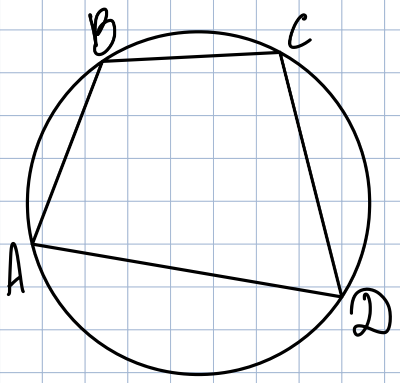
3) $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2 \cdot AB \cdot BN \cdot \cos B$

! $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{ab}$, где $\sin \hat{ab}$ можно найти, применив теорему косинусов.

XI Опис-ая и впис-ая окр. в 4-к.

Описанная окружность

Есть 2 способа док-ва того, что около 4-ка можно опис. окр:



I: Описать окр-сть около 4-ка можно только тогда, когда суммы против-ых углов =180°
Т.е., если ∠B+∠D =180°, то можно описать окр-сть.

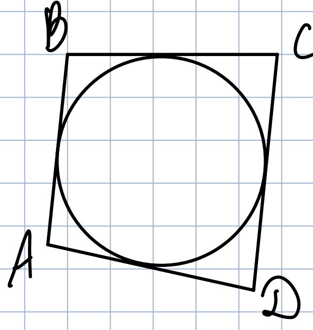
Если ∠B+∠D =180, то ∠A+∠C=360 − −(∠B+∠D) = 360 - 180 = 180. , поэтому достаточно доказать, что ∠B+∠D=180° или ∠A+∠C=180°

⇒ ! Если окр-сть описана около 4-ка, то ∠A+∠C = ∠B+∠D = 180°

II: по признаку вписанного угла — описываешь окр-сть около треуг-ка и доказ-шь, что 4-ая вершина лежит на этой окр-сти по признаку впис-го угла.

Признак впис-го угла — если угол при вершине (какой вершине? той, что нужно доказать, что она лежит на окр-сти) равен впис-ым углам в эту окружность и угол при вершине опирается на ту же дугу, что и впис-ый угол, то эта вершина лежит на этой окр-сти.

Вписанная Окружность



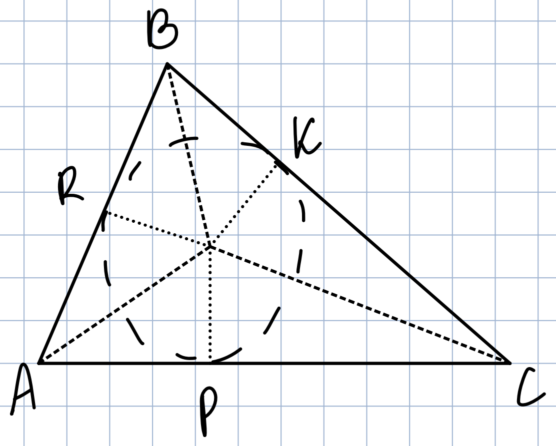
1. Вписать окр-сть в 4-к можно только тогда, когда суммы его прот-ых сторон равны.
Т.е. если $AB+CD=BC+AD$, то можно

вписать окр-сть.

! 2. Если окр-сть вписана в 4-к, то $AB+CD=BC+AD$.

XII Опис-ая и впис-ая в 3-к (Δ) окр-сть

Впис-ая окр-сть

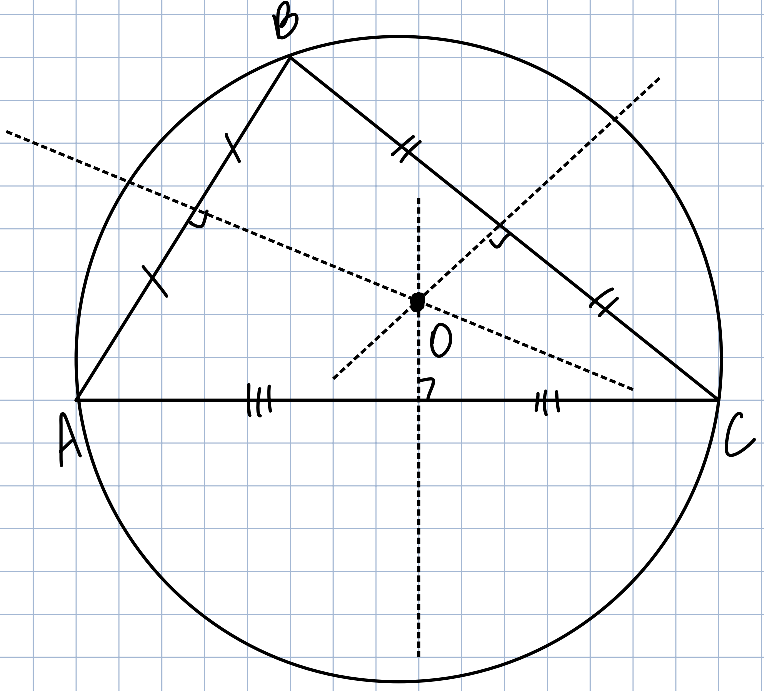


1) Центр впис-ой окр-сти лежит в т. пересечения его бисс-с => для получения центра впис-ой окр-сти нужно провести 3 бис-сы, но не до конца, а до т. их пересечения (для красоты рисунка)

2) После получения т. пересечения бисс-с, проводим из неё высоты к каждой стороне. Основания высот - т. касания впис-ой окр-сти со сторонами.

! $S = \frac{1}{2} P \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{0{,}5P}$

Описанная окружность



1) Центр опис-ой окр.
- это точка пересечения
её серединных перп-ов.

2) $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где
a и α – сторона и
её против-щий угол.

Работу выполнил:

Одикадзе Г.Г.