ОГЭ. Задание 20. Уравнения. Нер-ва. Выражения

I. Уравнения

II. Система ур-ий

III Нер-ва и система нер-в

IV Выражения

I. Уравнения

По-другому этот раздел можно было назвать рац-ые и дробно-рац-ые уравнения.
9-ти классник должен знать 4 вида уравнений

1) Степенные ур-ия (линейные ур-ия, квадр. ур-ия, ур-ия 3 степени и выше)

2) Дробные ур-ия

3) Сводимые / сведенные к произведению, равному 0.

4) Уравнения, решаемые с заменой

! При каком (каких) значениях икс $3x-4$ равен 11?

$3x-4=11$

! Сутью любого ур-ия является (ур-ие сущ-ет для) поиск такого числа, которое при подстановке на место икса уравняет левую и правую части ур-ия.

1. Степенные уравнения

К степенным ур-ям относятся ур-ия, где есть только числа и x в какой-то степени. Бывают простейшие и классические степенные ур-ия.

Простейшие

1) $x^5 = 32$

$x = \sqrt[5]{32} = 2$

2) $x^6 = 64$

$x = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$

3) $x^5 = 31$

$x = \sqrt[5]{31}$

4) $x^6 = 63$

$x = \pm\sqrt[6]{63}$

5) $x^3 = -8$

$x = -\sqrt[3]{8} = -2$

6) $x^3 = -7$

$x = -\sqrt[3]{7}$

7) $x^4 = -16$

нет решений

Классические

Это линейные ур-ия (x в 1-ой степени), квадратичные ур-ия (2-ой степ), ур-ия 3-ей степени и выше.

! Любое степенное ур-ие может быть усложнено числами в знаменателях. Решать такие ур-ия стоит с умножения левой и правой частей ур-ия на общий знам-ль

! Слово степенное не до конца корректно в этом случае, т.к. в мат-ке к степенным (показательно-степенным или показ-ым) относят немного другие ур-ия

Линейные ур-ия

Решение всех линейных ур-ий начинается с того, что все одночлены с буквой помещаются в одну сторону (чаще всего в левую), а все числа в другую (чаще всего в правую). Затем приводятся подобные, а после идёт деление всего ур-ия на число перед переменной.

! Деление на число это легко, а деление на выражение с переменной, которое будет объяснено в разделе II Триг. ур-ия, намного сложнее.

1) $7x-5=17x+2x-6$

$7x-17x-2x=5-6$

$-12x=-1 \quad |:(-12)$

$x=\frac{1}{12}$

! На что делишь, то и в зн-ле.

2) $\frac{x-2}{3}+\frac{3x+4}{2}=6-\frac{5-x}{5} \quad \Big|\cdot 30$

$\frac{x-2}{3}\cdot\frac{30}{1}+\frac{3x+4}{2}\cdot\frac{30}{1}=\frac{6}{1}\cdot\frac{30}{1}-\frac{5-x}{5}\cdot\frac{30}{1}$

$10(x-2)+15(3x+4)=180-6(5-x)$

Далее это обычное лин-ое ур-ие.

! $-\frac{m}{n}=\frac{-m}{n}=\frac{m}{-n} \longrightarrow -\frac{5}{6-x}=\frac{-5}{6-x}=\frac{5}{-(6-x)}=\frac{5}{-6+x}=\frac{5}{x-6}$

! $\frac{3x}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{1}=\frac{3}{4}\cdot x$, т.е. коэф-т перед x-ом $\frac{3}{4}$.

Квадратичные ур-ия

Все квадр-ые ур-ия (полные и неполные) можно решить при помощи дискриминанта.

$ax^2+bx+c=0$; $D=b^2-4\cdot a\cdot c$; $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

$D>0$ 2 корня; $D=0$ - 1 корень и кв-ый 3-член собирается в полн. квадрат. $D<0$ нет реш.

1) $x^2-4x+3=0$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=4$

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\cdot1}=3$

$x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\cdot1}=1$

2) $25x^2-16=0$

$(5x-4)(5x+4)=0$

$\left[\begin{array}{l}5x-4=0\\5x+4=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=0{,}8\\x=-0{,}8\end{array}\right.$

3) $4x^2-8x=0$

$4x(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l}4x=0\\x-2=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$

! ур-ия 2 и 3 решают как ур-ие 3-го вида
– сводимое/сведенное к произв, рав-му 0.

4) $\frac{3x^2-5}{6} - \frac{4}{5} = x^2 - 2 \quad | \cdot 30$

. . . .

Уравнения 3-ей степени и выше

Все ур-ия этой группы решаются одинаково – многочлен, равный 0, раскладывается на множители делением.

! Любое ур-ие из этой группы может считаться ур-ем 3-го вида – свод/свед к пр-ию, = 0. Можно было ур-ия 3-степени и выше рассмотреть не здесь, но лучше всё-таки здесь.

$3x^3 - 14x^2 + 17x - 6 = 0$

разложим на множители многочлен $3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$

1) Среди делителей нацело свободного коэф-та (-6) найдем тот, что при подстановке обратит многочлен в 0.

$\underset{+}{1}; -1; 2; -2; \underset{+}{3}; -3; 6; -6$

2) Делим оригинальный многочлен на x - число.
В нашем случае будем делить на $x-1$ или $x-3$.
! При делении подбираем такие одночлены в частном, чтобы "уравнивались" одночлены наивысшей степени.

$$\begin{array}{rrrr|l}
-\,3x^3 & -14x^2 & +17x & -6 & x-3 \\ \cline{5-5}
3x^3 & -9x^2 & & & 3x^2-5x+2 \\ \cline{1-2}
 & -\,-5x^2 & +17x & & \\
 & -5x^2 & +15x & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,2x & -6 & \\
 & & 2x & -6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 3x^3-14x^2+17x-6=(x-3)(3x^2-5x+2)$$

$$(x-3)(3x^2-5x+2)=0$$

$x-3=0$ или $3x^2-5x+2=0$

$x=3$ $\qquad$ $x_1=1;\ x_2=\frac{2}{3}$

Ответ: $x=3;\ 1;\ \frac{2}{3}$

! Многочлен $x^3-5x+6=0$ лучше записать как $x^3-0\cdot x^2-5x+6$ при делении.

2. Дробные уравнения

Дробным уравнением называется ур-ие, где в знаменателе есть X или многочлен с X-ом.

Т.к. в знам-ле есть многочлен с X-ом, а знаменатель это делитель, то при определенных иксах будет происходить деление на 0. (при определенных числах, которые могут быть на месте икса, будет происходить деление на нуль) Поэтому, чтобы не происходило деление на нуль, начинать решение дробного уравнения нужно с поиска чисел, которые могут быть на месте икса.

Чтобы найти числа, которые могут быть на месте икса, нужно сперва найти числа, которые не могут быть на месте икса.

Значит, нам нужно найти числа, которые не могут быть на месте икса, и запретить их. Для поиска и запрета используется логическая конструкция $\neq 0$.
($=0$ используется для поиска, а $\neq 0$ для поиска и запрета)

Весь этот поиск сперва "запретных" чисел, а потом допустимых (разрешенных) должен происходить в разделе с названием ОДЗ или уравнение определено при.

! До дробных ур-ий не было огр-ий, поэтому слова ОДЗ и ур-ие огр-о при не было.

Существует 2 способа решения дробных ур-ий

1. ОДЗ; домножение на общий зн-ль

2. ОДЗ + Сведение ур-ия к следующей логике:

Если $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то можно сказать, что результат деления будет равен нулю только тогда, когда в числителе 0 (когда 0 на что-то делили, напр. $0:3=0$; $0:(-4)=0$). => мы должны стремиться к тому, чтобы была только 1 дробь и эта дробь была равна 0 (не двум, трем и т.д.)

Пример: $\frac{3x-9}{x-1}+\frac{x+6}{x+1}=3$

ОДЗ:

1) $x-1\neq0$ (нужно найти, при каком числе $x-1$ будет равен нулю и запретить найденное число)

$x\neq1$

2) $x+1\neq0$

$x\neq-1$

Уравнение определено при $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup$

$\cup (1; +\infty)$ — это значит, что мы при решении ур-ия работаем с иксами из этого интервала, а $x = \pm 1$ (числа ± 1) мы не рассматриваем вовсе.

! Всё, что написано тонкой ручкой - дополнения и комментарии - их не нужно писать. Это касается только этого параграфа.

! Ур-ия с зачеркнутым знаком ($\neq$) решаются так же, как и ($=$); а ответы одинаковых ур-ий, но с разными знаками ($=$ и $\neq$) будут противоп-ми.

I способ:

$$\frac{3x-9}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 3 \quad \Big| \cdot (x-1)(x+1), \; (x-1)(x+1) \neq 0$$

! При домножении ур-ия на x или многочлен с иксам есть риск домножить ур-ие на 0. Например, если ты домножаешь на $x-3$, а корнем ур-ия является $x=3$, то домножение на $x-3$ равносильно умножению на 0 в этом ур-ии. Та же логика работает и при делении.

! Касаемо нашего ур-ия: домножение на $(x-1)(x+1)$ равносильно домножению на 0 при $x = \pm 1$. Но мы в ОДЗ написали, что ур-ие опр. при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ и иксы, равные ±1 мы не рассматриваем вовсе $\Rightarrow$ умножение на $(x-1)(x+1)$ в этом ур-ии не равносильно умножению на 0 т.е. $(x+1)(x-1)\neq 0$

$$(3x-9)(x+1)+(x+6)(x-1)=3(x-1)(x+1)$$

$$x^2-x-12=0$$

$$x_1=4;\ x_2=-3$$

Они не запрещены

Ответ: $x=4;-3$.

II способ:

$$\frac{3x-9}{x-1}+\frac{x+6}{x+1}-\frac{3}{1}=0$$ (сперва всё нужно перекинуть влево)

$$\frac{(3x-9)(x+1)+(x+6)(x-1)-3\underbrace{(x-1)(x+1)}_{(x^2-1)}}{(x-1)(x+1)}=0$$ (потом всё приводим к общ. зн-лю)

$$\frac{3x^2+3x-9x-9+x^2-x+6x-6-3x^2+3}{x}=0$$ (приводим подобные)

$$\frac{x^2-x-12}{(x-1)(x+1)}=0$$

Деление равно нулю тогда, когда делимое (числитель) равно нулю. Чтобы найти числа, при которых числитель нуль, запишем и решим ур-ие:

$x^2 - x - 12 = 0$

$x_1 = 4;\ x_2 = -3$ — Ответ: $x = 4; -3$.

Они не запрещены

! В 9-ом классе дробные ур-ия начинают решать, не написав ОДЗ (ур. определено при). Это компенсируется следующим: после получения строчки

$$\frac{x^2 - x - 12}{(x-1)(x+1)} = 0 \quad \text{идёт} \quad \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ (x-1)(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

— суть этой системы заключается в поиске таких x (таких чисел), при которых одновременно (для этого и стоит знак системы) числитель будет равен 0, а знам-ль нулём не будет. Дальше ищут решения первой строчки (и эти решения идут в ответ) и второй строчки (эти запреты могут запретить решения I стр).

Одним словом, II способ и переход к системе $\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ (x-1)(x+1) \neq 0 \end{cases}$ это одно и то же.

3. Уравнения, сводимые или уже сведенные к произведению, равному нулю.

Ур-ия из этой группы сводятся (если еще не сведены) к логике – если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$. Одним словом, многочлен, равный нулю, переводится в умножение, равное нулю.

Способы перевода в умножение многочленов

1. Вынесение общего множителя
2. Группировка
3. Ф. С. У. (формулы сокр-го умножения)
4. Разложение на множители квадр-го трехчлена:
   ax^2+bx+c может разложиться на $a(x-x_1)(x-x_2)$, где корни x_1 и x_2 нужно найти, приравняв ax^2+bx+c к 0.
   Например, переведем $3x^2-5x+2$ в умножение.
   1) $3x^2-5x+2=0$; 2) $x_1=1$; $x_2=\frac{2}{3}$ 3) $3x^2-5x+2=3(x-1)(x-\frac{2}{3})$.
5. Разложение на множ-ли многочлена 3 степени и выше:
   Деление в столбик – этот способ уже разбирался выше в док-те в разделе степенных ур-ий
   $3x^3-14x^2+17x-6=(x-3)(3x^2-5x+2)$

! Способы перевода в умножение нужно знать как тему, несвязанную с ур-ми. Эта тема нужна, например, при работе с буквенными дробями.

Примеры 0) $(x-3)(x-2)=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2. \end{array}\right.$

1. $25x^2-16=0$

$(5x-4)(5x+4)=0$

$\left[\begin{array}{l} 5x-4=0 \\ 5x+4=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{4}{5} \\ x=-\frac{4}{5} \end{array}\right.$

2) $4x^2-8x=0$

$4x(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} 4x=0 \quad |:4 \\ x-2=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

3) $x^4=(4x-5)^2$

$x^4-(4x-5)^2=0$

$(x^2-(4x-5))(x^2+(4x-5))=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2-4x+5=0 \text{ — нет реш} \\ x^2+4x-5=0 \text{ — } x_1=1;\ x_2=-5. \end{array}\right.$

4. $(x-3)(x-4)(x-5)=(x-2)(x-4)(x-5)$

$(x-3)(x-4)(x-5)-(x-2)(x-4)(x-5)=0$

$(x-4)(x-5)((x-3)-(x-2))=0$

$\left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x-5=0 \\ x-3-x+2=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=5 \\ -1=0 \quad \text{(нет реш-ий)} \end{array}\right.$

Ответ: $x=4;\ x=5.$

! Суть любого ур-ия заключается в поиске чисел, подстановка которых на место икса сделает левую часть ур-ие равной правой. Поэтому, если получилось $-1=0$, то нет иксов, при которых левая часть становится равна правой. А если получается $5=5$, то x, соответственно, любое число.

5. $3x^3-14x^2+17x-6=0$ – решение этого ур-ия есть выше.

6. $5x^3+15x^2-4x-12=0$ (ГРУППИРОВКА)

1) $(5x^3+15x^2)-(4x+12)=0$

2) $5x^2(x+3)-4(x+3)=0$

3) $(x+3)(5x^2-4)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ 5x^2-4=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

! Все 3 действия важны в группировке.

! Если решаешь какое-то уравнение и не можешь понять, к какому из 4-ёх видов оно относится, то скорее всего это уравнение из 3-го вида.

4. Уравнения, решаемые с заменой

Уравнения из этой группы очень разнообразны.

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$; тогда $x^4 = t^2$

! $x^2 = t$ – это ур-ие может быть использовано для выражения других многочленов с иксом через t. $x^2 = t \rightarrow x^2 + 5 = t + 5$

$\rightarrow x^6 = t^3$

! $\underbrace{4x = t \qquad 4x^2 = t^2}_{\text{неверно}}$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = 1 \end{array}\right.$ т.к. $x^2 = t$, то $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Ответ: $x = \pm 2; \pm 1$

! В данном случае $t \geq 0$ означает следующее – мы сами наложили это ограничение для t, чтобы сразу отсеять отрицательные t, неподходящие для приравнивания к x^2.

! Исходное ур-ие можно было воспринять как степенное (1 группа) и решить его делением.

II Система уравнений

Система ур-ий бывает 2-ух видов - с одной буквой и двумя. Решить систему ур-ий с одной буквой очень просто — нужно решить все ур-ия в системе по отдельности и найти такое число (такой X), которое является корнем каждого ур-ия. Это число и есть решение системы.

В данном параграфе мы изучим сис-мы с 2-мя буквами. Есть 2 способа решения таких систем.

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 5y = -14. \end{cases}$$

I: Метод подстановки

1. Выражаем какую-то переменную в одном из ур-ий. Выразить пер-ую означает видоизменить (поперекидывать + домнож. или раздел лев и прав ч) ур-ие так, чтобы оно стало x = многочлен с y (это выраз. x) или y = многочлен с x (это выраз. y).

1) $y = 5 - 3x$

2) $x = \frac{5-y}{3}$ (или $x = \frac{5}{3} - \frac{y}{3}$)

3) $x = \frac{-14 - 5y}{2}$

4) $y = \frac{-14 - 2x}{5}$

! Удобнее всего выр-ть букву с коэф-ом ± 1, как в п.1.

2. Подставляем в ур-ие, отличное от того, в котором выражали пер-ую (т.е. подставляем $y = 5 - 3x$ во II ур-ие)

$$2x + 5\cdot(5 - 3x) = -14$$
$$2x + 25 - 15x = -14$$
$$-13x = -39$$
$$x = 3$$

3. Находим вторую букву, подставляя в любое ур-ие. (можно и в $y = 5 - 3x$)

$$y = 5 - 3\cdot 3 = -4$$

Ответ: $(3; -4)$

! в ответе сперва x, потом y

! Если $x^2 = 4y - 5$, то $x = \pm\sqrt{4y-5}$ => не стоит выражать букву в непервой степени.

! Каждой найд-ой букве нужно найти своё соотв. знач.

Т.е. если после подстановки получилось, что $y = 5$ и -3, то нужно найти два соотв-щих икса.

! Иногда нужно выражать не $1x$ или $1y$, а $5x$, y^2, $3y^2$ и т.д — всё зависит от того, куда ты подставляешь.

II : Метод сложения

Метод сложения (вычитания) основывается на следующем свойстве системы ур-ий из 2-ух пер-ых — в любой момент можно сложить или вычесть имеющиеся ур-ия и получить новое. Далее это новое ур-ие можно вписать в систему и работать с новой системой

! Сложить (вычесть) два ур-ия означает следущее: к левой части первого ур-ия сложить (вычесть) левую часть второго ур-ия, а к правой правую.

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ -2x+5y=10 \end{cases}$$

$$(x+2y)+(-2x+5y)=4+10$$

$-x+7y=14.$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ -2x+5y=10 \\ -x+7y=14. \end{cases}$$

В данном случае, конечно, сложение не привело ни к чему полезному. Чтобы сложение привело к чему-то полезному, нужно сперва ур-ть коэф-ты!

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ -2x+5y=10 \end{cases} \quad \Big| \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2x+4y=8 \\ -2x+5y=10 \end{cases} \quad \Big| +$$

(! если бы наверху и внизу было 2x и 2x, то нужно было бы вычесть)

$$(2x+4y)+(-2x+5y)=18$$

$9y=18$; $y=2$; Далее также нужно подставить в любое из ур-ий и найти x.

$$x+2\cdot 2=4$$

$$x=0$$

Ответ: $(0;2)$

! Иногда сложение создаёт ур-ие, которое дальше нужно использ-ть, напр-р, для выражения и подстановки.

Примеры

1) $$\begin{cases} x^2 = 7y+2 \\ x^2+2 = 7y+y^2 \end{cases}$$

$$(7y+2)+2 = 7y+y^2$$

2) $$\begin{cases} x-y=-5 \\ x^2-2xy-y^2=17 \end{cases} \longrightarrow x = y-5$$

$$(y-5)^2-2y(y-5)-(y-5)^2=17$$

3) $$\begin{cases} (2x+3)^2=5y \\ (3x+2)^2=5y \end{cases}$$

$$(2x+3)^2=(3x+2)^2$$

4) $$\begin{cases} x^2+y^2=37 \\ xy=6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=37 \\ x=\frac{6}{y} \end{cases}$$ ($y=0$ не явл. реш. сист => можно делить на y)

$$\left(\frac{6}{y}\right)^2+y^2=37 \quad \Big| \cdot y^2 \quad (y \neq 0)$$

III Неравенства и система нер-в

! Сутью любого нер-ва является (нер-во сущ-ет для) поиск таких чисел, которые при подстановке на место икса сделают левую часть больше (меньше), чем правую.

Пример: При каких x (при каких числах на месте x) $2x-5$ будет больше 1?

$2x-5>1$ – используем логическую конструкцию неравенство для ответа на вопрос.

Существует 2 вида нер-в

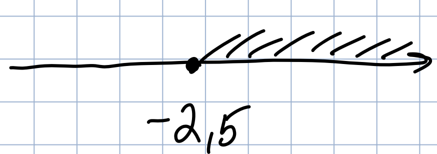
I Линейные

$3x-4 \le 5x+1$

$-2x \le 5 \quad |:(-2)$

$x \ge -2,5$

при делении нер-ва на отриц. число меняется знак!



! больше, чем -2,5 => штриховка правее -2,5; меньше, чем -2,5 – левее

$\ge$ или $\le$ • [ ]

$>$ или $<$ o ( )

Ответ: $x \in [-2,5; +\infty)$

(бескон-сть всегда с кругл. ск)

II Все остальные (решаются методом интервалов)

Метод интервалов:

1) перекинуть всё влево (или вправо)
2) заменить знак нер-ва на знак ур-ия
3) найти корни этого ур-ия. Найденные корни будут являться точками перехода на числовой прямой

! В дробных нер-ах запреты зн-ия тоже яв-ся точками перехода

4) нарисовать числовую прямую, отметить на ней точки перехода. Далее нужно определить, положит-ый или отриц-ый будет многочлен $(2x^2-3x)$ на каждом интервале, подставляя числа из каждого интервала в многочлен. Интервалы, в которых многочлен принимает положит. значение, получают знак (+); отриц-ые - (−)

5) штрихуем интервалы с (+), если знак $> \geq$
(−), если знак $< \leq$

Примеры нер-в из II группы.

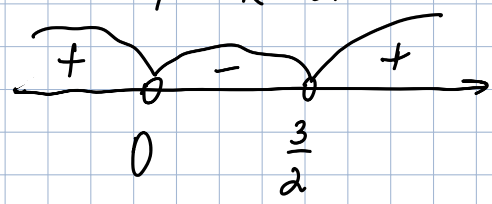
1. $2x^2 > 3x$

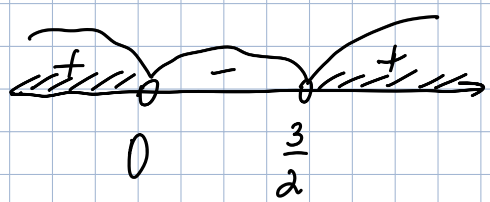
$2x^2 - 3x > 0$

$2x^2 - 3x = 0$

$x(2x-3) = 0$

$x = 0; \quad x = \frac{3}{2}$





! 1) взяли число 5 из прав-го инт.

$2 \cdot 25 - 3 \cdot 5 = 60 > 0 \Rightarrow +$

! многочлен $2x^2 - 3x$ на инт-ле $> \frac{3}{2}$ положит-ен!

2) взяли $\frac{1}{2}$ из среднего интерв

$2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1 < 0 \Rightarrow -$

3) взяли −2 из левого инт.

$2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 14 > 0 \Rightarrow +$

! штрихуем +, т.к. нам нужно узнать, на каких интервалах многочлен $2x^2 - 3x$ больше 0 (положителен), т.к. + в интервале и означает, что многочлен в этом интервале больше 0.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

2. $(4x-6)^2 \leq (6x-4)^2$

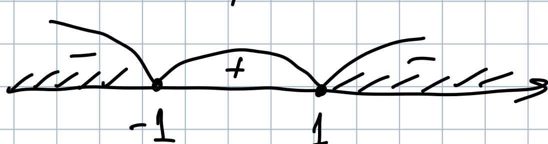
$(4x-6)^2 - (6x-4)^2 \leq 0$

$(4x-6)^2 - (6x-4)^2 = 0$

$((4x-6) - (6x-4))((4x-6) + (6x-4)) = 0$

$(-2x-2)(10x-10) = 0$

$x = -1; \; x = 1$



Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

3. $\frac{11x-4}{5} \geq \frac{x^2}{2} \quad \Big| \cdot 10$ (то же самое мы делаем и в ур-ях, усложненных числами в знам-ле)

$2(11x-4) \geq 5x^2$

$22x - 8 \geq 5x^2$

$5x^2 - 22x + 8 \leq 0$

4. $(\sqrt{3} - 1{,}5)(3 - 2x) > 0$

! $\sqrt{3} - 1{,}5$ – число!!!

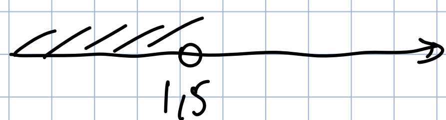
$\sqrt{3} - 1{,}5 = \sqrt{3} - \sqrt{2{,}25} \Rightarrow$ это положит. число

$(\sqrt{3} - 1{,}5)(3 - 2x) > 0 \quad \Big| : \sqrt{3} - 1{,}5$

$3 - 2x > 0$

$-2x > -3$

$x < 1{,}5$



Ответ: $x \in (-\infty; 1{,}5)$

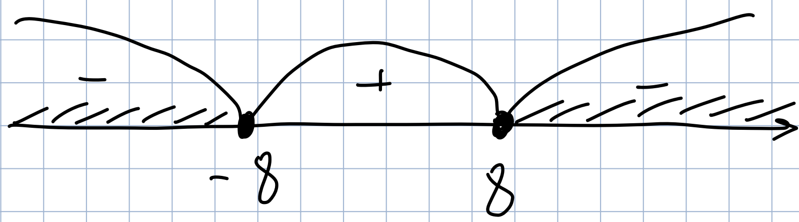
5. $x^2(-x^2-64) \le 64(-x^2-64)$

$x^2(-x^2-64) - 64(-x^2-64) \le 0$

$(-x^2-64)(x^2-64) = 0$

(подставляем сюда)

$\left[\begin{array}{l} -x^2-64=0 \\ x^2-64=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \text{нет реш} \\ x=\pm 8 \end{array}\right.$



6. $\dfrac{x-4}{x-5} \le 0$

(любое нер-во, где есть огр-ия, нужно начинать с ОДЗ.)

Нер-во опр. при

1) $x-5 \ne 0$

$x \ne 5$

$\dfrac{x-4}{x-5} \le 0$

I способ:

$\begin{cases} (x-4)(x-5) \le 0 \\ x-5 \ne 0 \end{cases}$ — это самый умный переход, т.к. знаки многочленов $(x-4)(x-5)$ и $\frac{x-4}{x-5}$ один-ые.

Т.к. вторая строчка системы уже написана в ОДЗ, то оставляем только 1-ую строчку

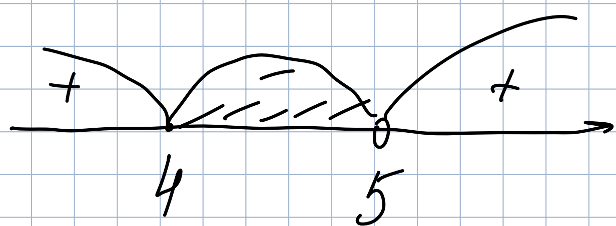
$(x-4)(x-5) \leq 0$

(5 выколотая!!! т.к. в зн-ле)

II способ: (я считаю лучше)

$x-4=0$ $\qquad$ $x-5 \neq 0$

$x=4$ $\qquad$ $x \neq 5$



Ответ: $x \in [4;5)$

7. $$\frac{-10}{(x-3)^2-5} \geq 0$$

Нер-во опр. при:

1) $(x-3)^2-5 \neq 0$

$(x-3)^2 \neq 5$

$\left[\begin{array}{l} x-3 \neq \sqrt{5} \\ x-3 \neq -\sqrt{5} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x \neq 3+\sqrt{5} \\ x \neq 3-\sqrt{5} \end{array}\right.$

$-10=0$ $\qquad$ $(x-3)^2-5 \neq 0$

нет реш. $\qquad$ $x \neq 3+\sqrt{5}$; $x \neq 3-\sqrt{5}$

Система нер-в

Решить систему нер-в (тут разберутся только системы с одной буквой) очень легко – нужно решить каждое нер-во по отдельности, потом нужно нарисовать каждую прямую друг под другом и найти общее решение.

7. $$\begin{cases} \dfrac{-10}{(x-3)^2-5} \geq 0 & (1) \\ 2x^2-3x>0 & (2) \end{cases}$$

(1) Нер-во опр. при:

1) $(x-3)^2-5 \neq 0$

$(x-3)^2 \neq 5$

$\left[\begin{array}{l} x-3 \neq \sqrt{5} \\ x-3 \neq -\sqrt{5} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \neq 3+\sqrt{5} \\ x \neq 3-\sqrt{5} \end{array}\right.$

$-10=0$ нет реш.

$(x-3)^2-5 \neq 0$

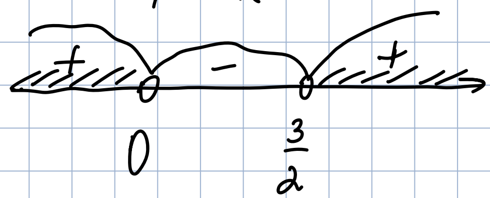
$x \neq 3+\sqrt{5}$; $x \neq 3-\sqrt{5}$

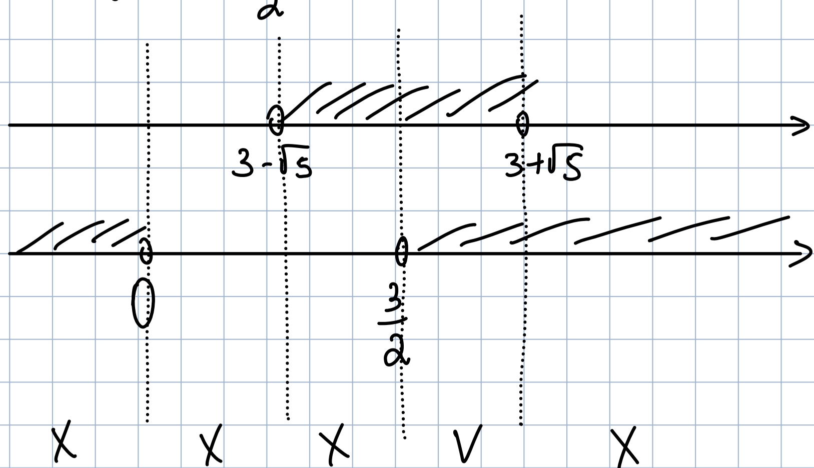
(2) $2x^2-3x>0$

$2x^2-3x=0$

$x(2x-3)=0$

$x=0;\quad x=\frac{3}{2}$





Ответ: $x\in\left(\frac{3}{2};\ 3+\sqrt{5}\right)$

IV Алгебраические Выражения

В данный раздел войдут следующие темы:

1. Способы перевода в умножение
2. Работа с буквенными дробями
3. Степени

Способы перевода в умножение многочленов

Способы перевода в умножение уже разбирались в этом документе в 3-ем виде ур-ий. Разберём подробнее.

1. Вынесение общего множителя

$6x^2 + 15x = 3x(2x+5)$

$30x^3y + 6x^2y^2 - 18x^2y^4 = 6x^2y(5x + y - 3y^3)$

! В скобках остается результат деления того, что было, на то, что вынесли. $30x^3y : 6x^2y = 5x$ и т.д.

2. Группировка

(по сути группировка это вынесение общего множителя 2 раза)

Пример: $5x^3 + 15x^2 - 4x - 12 = (x+3)(5x^2-4)$

1) $(5x^3 + 15x^2) - (4x+12)$ – сгруппировали по двое
2) $5x^2(x+3) - 4(x+3)$ – вынесли из каждой скобки множ-ль
3) $(x+3)(5x^2-4)$ – вынесли общий множитель

3. Ф. С. У. (формулы сокр-го умножения)

Для начала изучим 2 способа видоизменения двухчленов (данный способ подходит для всех многочленов)

1) изменение позиции без изменения знаков
2) $-(\quad)$. Данный способ подразумевает написание скобок и смена знаков каждого одночлена в скобке на против-ый.

1) $6x + 5y$

1. $5y + 6x$
2. $-(-6x - 5y)$

2) $-6x + 5y$

1. $5y - 6x$
2. $-(6x - 5y)$

3) $6x - 5y$

1. $-5y + 6x$
2. $-(-6x + 5y)$ $= -(5y - 6x)$ – имеет смысл видоизм-ть двухчлен в скобке I способом

4) $-5y - 6x$

1. $-6x - 5y$
2. $-(5y + 6x)$

Формулы сокращенного умножения выполняют 2 функции:

1) позволяют найти результат умножения **сокращенно**
2) переводят многочлены в **умножение**.

1) Сокращенно – т.е. видишь любую из пяти констр-ций и сразу пишешь "результат."

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

! $(-a-b)^2 = (-(a+b))^2 = (a+b)^2$

! $(a-b)^2 = (-(-a+b))^2 = (-(b-a))^2 = (b-a)^2$

Примеры:

1) $(6-x)(6+x) = 36 - x^2$

! Результат $(6-x)(6+x)$ можно найти не сокращенно, а простым произведением: $(6-x)(6+x) = 36+6x-6x-x^2 = 36-x^2$

2) $(x-6)(6+x) = (x-6)(x+6) = x^2-36$

3) $(x+6)(-6+x) = (x+6)(x-6) = x^2-36$

4) $(-x-6)(6-x) = -(x+6)(6-x) = -(6+x)(6-x) = -(36-x^2) = x^2-36.$

$(a-b)(a+b)$

5) $(6-x)^2 = 36-12x+x^2$ $(a=6; b=x \Rightarrow a^2=36; 2ab=12x; b^2=x^2)$

! $(6-x)^2 = (6-x)(6-x) = 36-6x-6x+x^2 = 36-12x+x^2$

6) $(-3+4x)^2 = (4x-3)^2 = 16x^2-24x+9$

7) $(6+2x)^2 = 36+24x+4x^2$

8) $(-6-2x)^2 = (-(6+2x))^2 = (6+2x)^2$ (по св-ву четной степени)

9) $(5-2x)(25+10x+4x^2) = 125-8x^3$ (результат можно было получить обычным длинным умножением)

а) Умножение

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Примеры:

1) $49-81x^2=(7-9x)(7+9x)$

2) $-25x^2+16=16-25x^2=(4-5x)(4+5x)$

произведение

3) $16x^2-40x+25=(4x-5)^2 = (4x-5)(4x-5)$

1) находим квадраты и выясняем, что возводилось в квадрат

$16x^2$ и 25 – это $4x$ и 5

2) знак перед удвоенным произв-ем идет в скобку

4) $100x^2+49y^2+140xy = 100x^2+140xy+49y^2=(10x+7y)^2$

! Далеко не все трехчлены собираются в полный квадрат. Собираются только те, у которых "по середине" удвоенное произв-ие. Т.е. после того, как выяснили, что возводилось в квадрат ($10x$ и $7y$), нужно посмотреть, находится ли их удвоенное произв-ие по середине. Если да, то трехчлен собирается в полный квадрат, если нет, то не собирается.

5) $1000-27x^6=(10-3x^2)(100+30x^2+9x^4)$

Надо по a^3-b^3 понять, что было a и b. В данном примере $a=10$; $b=3x^2$.

4. **Разложение на множители квадр-го трехчлена:**

ax^2+bx+c может разложиться на $a(x-x_1)(x-x_2)$, где корни x_1 и x_2 нужно найти, приравняв ax^2+bx+c к 0.

Например, переведём $3x^2-5x+2$ в умножение.

1) $3x^2-5x+2=0$; 2) $x_1=1$; $x_2=\frac{2}{3}$ 3) $3x^2-5x+2=3(x-1)(x-\frac{2}{3})$.

5. **Разложение на множ-ли многочлена 3 степени и выше:**

Деление в столбик — этот способ уже разбирался выше в док-те в разделе степенных ур-ий

$3x^3-14x^2+17x-6=(x-3)(3x^2-5x+2)$

Работа с буквенными дробями

Работа с буквенными дробями совпадает с числовыми дробями. Вспомним основные моменты работы с числовыми дробями.

1) $\frac{34}{51} = \frac{2\cdot\cancel{17}}{3\cdot\cancel{17}} = \frac{2}{3}$ - числитель и знаменатель раскладываются на множители для сокращения дроби

$$\frac{6x^2-3x}{4x^2-1} = \frac{3x\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}(2x+1)} = \frac{3x}{2x+1}$$

2) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6} =$

1) при складывании и вычит. дробей знам-ли раскл-ся на множители и подчеркиваются одинаковые множ-ли.

$$\frac{3}{2\cdot\underline{2}\cdot 2} + \frac{5}{\underline{2}\cdot 3}$$

2) Находится общий зн-ль следующим способом: подчеркнутый множитель пишется один раз, и к нему добавляются все остальные.

Общ. зн: $\underline{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 3$ (можно написать 24)

3) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} = \frac{3\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3} = \frac{9+20}{24} = \frac{29}{24}$

$$\frac{5}{a^2-2a}+\frac{6}{a^2-4}=\frac{5^{\,a+2/}}{a(a-2)}+\frac{6^{\,a/}}{(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{5\cdot(a+2)+6a}{a(a-2)(a+2)}=\frac{5a+10+6a}{a(a-2)(a+2)}=\frac{11a+10}{a(a-2)(a+2)}$$

3) $\frac{33}{50}\cdot\frac{20}{77}=\frac{33\cdot 20}{50\cdot 77}$ – получим одну дробь и

раскладываем на множители числитель и зн-ль

для дальнейшего сокр-ия, как в п 1 чуть выше.

$$=\frac{\cancel{11}\cdot 3\cdot 2\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 5\cdot \cancel{2}\cdot 7\cdot \cancel{11}}=\frac{6}{35}$$

$$\frac{y^2-6y+9}{4y^2-25}\cdot\frac{6y^2-15y}{y-3}=\frac{(y^2-6y+9)(6y^2-15y)}{(4y^2-25)(y-3)}=$$

$$=\frac{(y-3)^{\cancel{2}}\cdot 3y\cancel{(2y-5)}}{\cancel{(2y-5)}(2y+5)\cdot\cancel{(y-3)}}=\frac{3y(y-3)}{2y+5}$$

! Многочлен в зн-ле, записанный в виде умножения, всегда остается в виде умножения.

! $-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$

$$-\frac{4-x}{x+5} = \frac{-(4-x)}{x+5} = \frac{x-4}{x+5}$$

$$= \frac{4-x}{-(x+5)} = \frac{4-x}{-x-5}$$

Примеры

I $\frac{y}{x-y} \overset{3}{-} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} \overset{2}{\cdot} \left(\frac{x}{(x-y)^2} \overset{1}{-} \frac{y}{x^2-y^2} \right)$

1) $$\frac{x}{(x-y)(x-y)} - \frac{y}{(x-y)(x+y)} = \frac{x(x+y) - y(x-y)}{(x-y)^2(x+y)} =$$

$$= \frac{x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy} + y^2}{\text{''} - \text{''}} = \frac{x^2+y^2}{(x-y)^2(x+y)}$$

2) $$\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{(x-y)^2(x+y)} = \frac{x\cancel{(x-y)}\cancel{(x+y)} \cdot \cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}(x-y)^{\cancel{2}}\cancel{(x+y)}} =$$

$$= \frac{x}{x-y}$$

3) $$\frac{y}{x-y} - \frac{x}{x-y} = \frac{y-x}{x-y} = \frac{-(-y+x)}{x-y} = \frac{-\cancel{(x-y)}}{\cancel{x-y}} = -1$$

II

$$\frac{a}{2a-4}-\frac{a^2+4}{2a^2-8}=\frac{a^{\,a+2/}}{2(a-2)}-\frac{a^2+4}{2(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{\cancel{a^2}+2a-\cancel{a^2}-4}{2(a-2)(a+2)}=\frac{\cancel{2}\cancel{(a-2)}}{\cancel{2}\cancel{(a-2)}(a+2)}=\frac{1}{a+2}$$

III:

$$\frac{6}{a-1}\overset{2}{-}\frac{10}{(a-1)^2}\overset{1}{:}\frac{10}{a^2-1}\overset{3}{-}4=$$

1) $$\frac{10}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a-1)(a+1)}{10}=\frac{\cancel{10}\cancel{(a-1)}(a+1)}{(a-1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{10}}=\frac{a+1}{a-1}$$

2) $$\frac{6}{a-1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{6-(a+1)}{a-1}=\frac{5-a}{a-1}$$

3) $$\frac{5-a}{a-1}-\frac{4}{1}=\frac{5-a-4(a-1)}{a-1}=\frac{5-a-4a+4}{a-1}=$$

$$=\frac{9-5a}{a-1}$$

IV:

$$\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{x+2}{x^2+x-2^{*}}=\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=$$

$$*\ x^2+x-2=0$$

$$x_1=-2 \quad x_2=1$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

$$= \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{x - 1\cdot(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-x+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

V: Сокр-ть $\frac{ab-2b-6+3a}{a^2-4} = \frac{(ab-2b)-(6-3a)}{(a-2)(a+2)} =$

$$= \frac{b(a-2) - 3(2-a)^*}{\text{''}-\text{''}} =$$

$$-3\cdot(2-a) = -3\cdot\left(-(-2+a)\right) = -3\cdot\left(-(a-2)\right) = 3(a-2)$$

$$= \frac{b(a-2)+3(a-2)}{\text{''}-\text{''}} = \frac{\cancel{(a-2)}(b+3)}{\cancel{(a-2)}(a+2)} = \frac{b+3}{a+2}$$

Степени

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$x^6 \cdot x^5 = x^{11}$

$x^6 \cdot x^{-5} = x^1$

$x^{n+3} \cdot x^{2n+5} = x^{3n+8}$

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$

$a^6 : a^{-3} = a^9$

$x^{2n+3} : x^{-3n+4} = x^{2n+3-(-3n+4)} = x^{2n+3+3n-4} = x^{5n-1}$

$x^{m-6} = x^m : x^6$ или $\frac{x^m}{x^6}$

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(3^4)^5 = 3^{20}$

$9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$

$8^7 = (2^3)^7 = 2^{21}$

$7^{12} = 7^{3 \cdot 4} = (7^3)^4$ или $(7^4)^3$

4) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$4^5 \cdot 3^5 = 12^5$

$(7 \cdot 8)^2 = 7^2 \cdot 8^2$

$10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$

5) $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

$10^4 : 2^4 = \left(\frac{10}{2}\right)^4 = 5^4$

$\left(\frac{8}{3}\right)^5 = \frac{8^5}{3^5} = 8^5 : 3^5$

6) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

7) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[3]{4^5} = 4^{\frac{5}{3}}$

! $\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$ или $\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c}$

! Ф-лы со степенями работают в 2-ух случаях – или одинаковые основания, или один-ое показ.

Примеры

1) $$\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}} = \frac{(3^2\cdot 2)^{n+3}}{\text{〃 — 〃}} = \frac{(3^2)^{n+3}\cdot 2^{n+3}}{\text{〃 — 〃}} =$$

$$= \frac{3^{2n+6}\cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot 2^{n-2}} = \frac{3^{2n+6}}{3^{2n+5}}\cdot\frac{2^{n+3}}{2^{n-2}} = 3^{2n+6-2n-5}\cdot$$

$$\cdot 2^{n+3-n+2} = 3\cdot 2^5 = 3\cdot 32 = 96$$

2) $$\frac{(3x)^3\cdot x^{-9}}{x^{-10}\cdot 2x^5} = \frac{27\cdot x^3\cdot x^{-9}}{2\cdot x^{-5}} = \frac{27\cdot x^{-6}}{2\cdot x^{-5}} = \frac{27}{2}\cdot\frac{x^{-6}}{x^{-5}} =$$

$$= \frac{27}{2}\cdot x^{-1} = \frac{27}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{27}{2x}$$

3) $$\frac{(2a^2)^3\cdot(3b)^2}{(6a^3b)^2} = \frac{2^3\cdot(a^2)^3\cdot 3^2\cdot b^2}{6^2\cdot(a^3)^2\cdot b^2} = \frac{8\cdot\cancel{a^6}\cdot 9\cdot\cancel{b^2}}{36\cdot\cancel{a^6}\cdot\cancel{b^2}} =$$

$$= 2.$$

в числ не раб ни одна ф-ла

4) $$\frac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2\cdot 5^n} = \frac{5^n\cdot 5 - 5^n\cdot 5^{-1}}{\text{〃 — 〃}} = \frac{\cancel{5^n}\left(5-\frac{1}{5}\right)}{\cancel{5^n}\cdot 2} = 2{,}4.$$

Работу выполнил:

Одикадзе Г.Г.